АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК, 2025, том 59, № 2, с. 173–196

УДК 52+51

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ И ВРАЩЕНИЯ НА ОБРАЗОВАНИЕ ДИНАМО-ЭФФЕКТА В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

 А. В. Колесниченко

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
e-mail: kolesn@keldysh.ru

Поступила в редакцию 16.08.2024 г.
После доработки 15.08.2024 г.
Принята к публикации 09.10.2024 г.

Обсуждается ключевая роль семейства инвариантов гидромагнитной спиральности в связи с генерацией и поддержанием магнитных полей в геофизическом и астрофизическом контекстах. Влияние сжимаемости и вращения на турбулентный перенос вещества в спиральных гидромагнитных течениях исследуется с помощью феноменологического подхода при очень высоких числах Рейнольдса. Флуктуирующие эффекты, входящие при этом в осредненные МГД-уравнения через их корреляционные вклады и представляющие собой гидромагнитное турбулентное напряжение, турбулентную электродвижущую силу и ряд других корреляционных функций, моделируются с помощью линейных замыкающих соотношений (при отсутствии отражательной симметрии мелкомасштабных движений) и дифференциальных уравнений для четырех спиральных идентификаторов хиральной турбулентности (дескрипторов), которыми являются: полная турбулентная энергия плазмы, турбулентная поперечная спиральность, турбулентная остаточная энергия и турбулентная остаточная спиральность. Считается, что модельные уравнения для этих дескрипторов, объединенные со сжимаемыми МГД-уравнениями среднего поля, позволяют наиболее полно сконструировать самосогласованную модель турбулентного динамо. Конечной целью предпринятого исследования является разработка моделей спиральной гидромагнитной турбулентности, способных эффективно работать в гиперзвуковом режиме.

Ключевые слова: хиральная астрофизическая турбулентность, эффекты сжимаемости и вращения, магнитная, поперечная и остаточная спиральности, теория турбулентного динамо

DOI: 10.31857/S0320930X25020064, **EDN**: KWJTEH

ВВЕДЕНИЕ

Магнитные поля широко наблюдаются в видимой Вселенной на всех уровнях, будь то планетарный, звездный, галактический или межгалактический. За последние пять десятилетий теории турбулентного динамо среднего поля и численное моделирование несжимаемой гидромагнитной турбулентности получили широкое развитие в ряде областей исследований, включая изучение гео- и планетарного магнетизма, солнечной и звездной магнитной активности, межпланетных и межзвездных магнитных полей, космических магнитных полей и др. Считается, что создание и поддержание магнитных полей во многом объясняется действием динамо-машины, связанной с отсутствием отражательной симметрии фоновой турбулентности, другими словами, с хиральностью турбулентных движений электропроводной жидкости. Простейшей количественной мерой хиральности является неисчезающая спиральность фоновой турбулентности, которая, в частности, ответственна за генерацию и поддержание крупномасштабных магнитных полей, обладающих собственной магнитной спиральностью. Теория спиральной турбулентности в электропроводной среде успешно используется в настоящее время для объяснения крупномасштабных динамических явлений, связанных с эволюцией астро- и геофизических объектов различной природы, например, с галактическими газовыми дисками, с аккреционными дисками, с индуцированными мелкомасштабной турбулентностью магнитными полями в галактике, динамическими процессами в конвективной зоне Солнца и во внешнем ядре Земли и т.д. (см., например, Yoshizawa, 1984; 1990; 1996; 1998; Yoshizawa, Yokoi, 1993; Yokoi, Yoshizawa, 1993; Yokoi, 1996; 2011; 2013; 2018; Yoshizawa и др., 1999a,b; 2000; Oughton, Prandi, 2000; Matthaeus и др., 2004; Zhou и др., 2004; Sur, Brandenburg, 2009). Представителями сферических космических объектов являются, например, Земля и Солнце, а цилиндрических — вращающиеся аккреционные диски вокруг астрофизических объектов большой массы.

В недавнем обзоре (Kolesnichenko, 2024), посвященном исследованию разнообразных диссипативных вихревых (когерентных) структур в немагнитной сильно турбулентной жидкости, рассматривались основные динамические характеристики спиральной гидродинамической турбулентности, которые определяют эволюцию структурных параметров газа в турбулентных астрофизических дисках. С фактической точки зрения наиболее богата подобными диссипативными структурами развитая турбулентность в термодинамически открытой системе, когда при очень высоких числах Рейнольдса Re (определяемых интегральным масштабом L, характеристической скоростью u и кинематической вязкостью ν среды) нарушаются различные симметрии (пространственные переносы, сдвиги по времени, вращения, галилеевы и масштабные преобразования и др.), допускаемые уравнениями Навье—Стокса и соответствующими краевыми условиями. Однако в тех случаях, когда турбулентное течение свободно от внешнего принуждения (связанного, например, с крупномасштабным сдвигом скорости при вращении диска), развитая турбулентность в пределе больших чисел Рейнольдса имеет, как известно, тенденцию восстанавливать (в статистическом смысле) нарушенные симметрии вдали от границ течения.

Вместе с тем существует хиральная турбулентность, которая и при очень больших числах Рейнольдса не восстанавливает нарушенную отражательную симметрию (так называемый закон четности) поля пульсационных скоростей в случае преобразования координат $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$. Примером такой турбулентности является, в частности, пульсирующее поле скоростей в конвективной зоне астрофизического немагнитного аккреционного диска: средние свойства этого поля не остаются инвариантными при зеркальном отражении в его экваториальной плоскости. Подобная турбулентность, как известно, называется гиротропной (или спиральной от английского слова “helicity”) и возникает под влиянием массовых сил с псевдовекторными свойствами (например, силы Кориолиса, магнитного поля и т.п.). Впервые на важность влияния спиральности локализованных вихревых возмущений на эволюцию трехмерной несжимаемой турбулентности обратил внимание Moffatt (1969), который и нашел связанный с ней интегральный инвариант $H_K(\mathbf{x},t) := \langle \mathbf{u}' \cdot \omega' \rangle$ — кинетическую спиральность, представляющую собой право- и левостороннюю закрутку силовых линий вихревого поля скоростей, связанную с флуктуационным движением турбулентной жидкости (другими словами, являющуюся количественной мерой нарушения зеркальной симметрии потока или топологических свойств мелкомасштабных флуктуаций).

Кинетическая спиральность — это псевдоскаляр, который не является положительно определенной величиной и меняет знак при переходе от левой к правой системе координат (или наоборот). Следует отметить, что здесь и далее везде в качестве операции осреднения используется статистико-математическое осреднение по ансамблю возможных реализаций случайных гидромагнитных полей (см., например, Монин, Яглом, 1996). Напомним также, что только благодаря введению в рассмотрение так называемой магнитной перекрестной (кросс) спиральности $W := \mu_0^{-1}\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{B}' \rangle$ для описания гидромагнитной турбулентности, не обладающей зеркальной симметрией, удалось объяснить механизм турбулентного динамо в астрофизике (так называемый α-эффект), отвечающий за генерацию и поддержание крупномасштабных магнитных полей $\overline{\mathbf{B}}$ у планет, звезд и галактик (см. Hamba, 1992; Yoshizawa, Yokoi, 1993).

Заметим, что развитая турбулентность во вращающемся звездном аккреционном диске имеет спиральный характер. Это связано с тем, что мелкомасштабное пульсационное поле скоростей $\mathbf{u}'$ при наличии вращения дискового вещества с постоянной угловой скоростью ©$_0$ (аксиальный вектор) и анизотропии, вызванной, например, воздействием поля силы тяжести $\mathbf{g}$ или поля вертикального градиента температуры $\nabla\theta$ (полярные векторы), не обладает отражательной симметрией относительно экваториальной плоскости диска, т.е. относительно преобразования $z \to -z$. Последнее означает, что в таком анизотропном мелкомасштабном пульсационном поле скоростей вихревые левовращательные движения в совокупности могут быть более вероятными, чем правовращательные движения, или наоборот.

Важнейший аспект теории спиральной гидромагнитной турбулентности связан с исследованием взаимодействия между гидродинамической турбулентностью и магнитной турбулентностью при наличии внешнего и наведенного магнитных полей. Турбулентные потоки вещества и энергии возникают в результате неоднородного пространственного распределения плотности, температуры, энергии, скорости и т.п. в различных физических процессах, таких как диффузия, конвекция, излучение и т.д. В гидромагнитных (МГД) течениях существует сложное взаимодействие между осредненными и флуктуирующими плотностью, скоростью и магнитным полем. Даже однородное магнитное поле сильно изменяет динамические свойства гидромагнитной турбулентности, в отличие от чисто гидродинамической турбулентности, в эволюции которой, как известно, доминирует вихревое (пульсационное) искажение однородного поля скоростей.

Еще одним из актуальных аспектов, требующим особого рассмотрения при изучении структурных свойств газообразных астрофизических объектов, является учет сверхзвукового эффекта сжимаемости турбулентной среды, на который, к сожалению, до последнего времени мало обращалось внимания. Однако в астрофизических явлениях часто приходится сталкиваться с ударными волнами, которые генерируются в турбулентных средах и влияют на формирование вихревой структуры в гидромагнитной турбулентности, причем уровень и анизотропия турбулентных флуктуаций резко возрастают в области ударных волн. Заметим, что даже в гидродинамической турбулентности взаимодействие ударной волны и турбулентности является одной из наиболее сложных проблем моделирования турбулентности. Эффекты сжимаемости заслуживают особого внимания еще и потому, что именно сжимаемость турбулентной плазмы может приводить как к усилению, так и к подавлению генерации мелкомасштабных пульсаций структурных параметров космической среды при их взаимодействии с осредненным гидродинамическим полем и внешним магнитным полем (Liou и др., 1995; Yoshizawa и др., 1997; Adumitroaie и др., 1999; Yokoi, 2018). Кроме того, хорошо известно, что одной из наиболее важных проблем, связанных с сильно сжимаемой МГД-турбулентностью, является динамическое звездообразование. Считается, что скорость звездообразования контролируется формированием молекулярных облаков и поддерживается сверхзвуковой турбулентностью во взаимодействии с гравитацией и вращением.

Наконец, при моделировании эволюции радиационно-доминирующих областей аккреционных геометрически тонких звездных дисков необходимо также принимать во внимание наличие жесткого рентгеновского излучения в горячих коронах, окружающих диски, в которых часто преобладает радиационное давление.

Таким образом, построение модели, отвечающей всем перечисленным требованиям, является одной из сложных задач в исследовании сжимаемой гидромагнитной турбулентности. К сожалению, в настоящее время какой-либо строгой феноменологической теории сверхзвуковой спиральной гидромагнитной турбулентности не существует. Вместе с тем только теория подобной турбулентности позволяет глубже понять многие динамические крупномасштабные явления в астро- и геофизике, например, особенности генерации дополнительного магнитного поля при движении сжимаемой электропроводной жидкости, перенос углового момента дискового вещества на периферию диска (в основном под действием турбулентного магнитного поля) или выделение тепла в нем при аккреции и т.п.

В связи со сказанным, в представленной работе сделана попытка конструирования феноменологической модели спиральной гидромагнитной турбулентности, учитывающей влияние сжимаемости и вращения на процесс генерации турбулентности в МГД-системах при использовании осредненных скорости, магнитного поля, плотности и температуры. При этом предполагается, что эволюция турбулентности обусловливается и приводит к квазистационарному состоянию самой спиральной турбулентностью, независимо от ее происхождения (см., например, Hawley, Balbus,1991). В данной работе, при конструировании феноменологической модели, турбулентное движение плазмы раскладывается на осредненную составляющую и пульсационную составляющую, состоящую из случайных суперпозиций взаимодействующих между собой мелкомасштабных волновых мод и образующую так называемую турбулентную надструктуру. Пульсационные эффекты, входящие при этом в осредненные МГД-уравнения через их корреляционные вклады, представляют собой разнообразные турбулентные потоки, турбулентную электродвижущую силу и некоторые другие корреляционные характеристики, для которых необходимо иметь замыкающие соотношения. В работе все турбулентные потоки моделируются вблизи квазиравновесного состояния линейными соотношениями (являющимися функциями термодинамических сил), т.е. связаны с градиентами осредненных структурных параметров через кинетические транспортные коэффициенты, которые выражаются в терминах корреляционных функций. В случае отсутствия отражательной симметрии мелкомасштабных движений электропроводной жидкости эти коэффициенты зависят от ряда объемных идентификаторов (дескрипторов) спиральной МГД-турбулентности, которыми являются: турбулентная энергия вещества плазмы $b := \langle |\mathbf{u}''|^2\ /\ 2\rangle$, турбулентная магнитная энергия $\langle b_{\mathrm{M}}\rangle := \overline{|\mathbf{B}'|^2} / 2\bar{\rho}\mu_0$ турбулентная поперечная (кросс) спиральность $W = \langle \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}' / \sqrt{\bar{\rho}}\ \mu_0\rangle$ (корреляция между флуктуациями скорости и магнитного поля), остаточная энергия турбулентности $K_{\mathrm{R}} := \langle b\rangle - \langle b_{\mathrm{M}}\rangle$ (разница между гидродинамической и магнитной энергиями турбулентности) и, наконец, турбулентная остаточная спиральность $H = \bar{\rho}^{-1}\overline{\mathbf{B}' \cdot \mathbf{j}'} - \langle \boldsymbol{\omega}'' \cdot \mathbf{u}''\rangle$ (разница между токовой H_{M} и кинетической H_{K} спиральностями (Yoshizawa, 1985).

Подобные дескрипторы, используемые в литературе (см., например, Yoshizawa, Yokoi, 1993; Yoshizawa и др., 2004; Yokoi и др., 2008) для моделирования динамических свойств несжимаемой астро- и геофизической турбулентности, играют ключевую роль в плазменных спиральных крупномасштабных явлениях (в частности таких, как турбулентное динамо). Заметим, что эффект динамо-машины возникает в турбулентных потоках при огромных числах Рейнольдса (например, во внешнем ядре Земли $Re \sim \mathcal{O}(10^8)$, а в галактиках $Re \sim \mathcal{O}(10^{11})$), когда мелкомасштабные флуктуации скорости и магнитного поля приводят к генерации дополнительных (наведенных) магнитных полей, вызывающих электрические токи проводимости $\bar{\mathbf{j}}$, параллельные (или антипараллельные) вектору магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}$, а также влияют на поле скорости через силу Лоренца. Для указанных дескрипторов в работе приведены модельные эволюционные уравнения, которые, наряду с осредненными МГД-уравнениями, должны решаться численно (одновременно и самосогласованным образом) при наиболее адекватном моделировании спиральных явлений в турбулентной электропроводной жидкости.

Таким образом, в данной работе для случая сжимаемой магнитной гидродинамики получена замкнутая система гидромагнитных уравнений масштаба среднего движения, для которой спиральные эффекты существенно влияют на динамику происходящих в ней гидродинамических и электродинамических процессов. При этом важно отметить, что при разработке модели сжимаемой среды нами, наряду с традиционным рейнольдсовским осреднением (или осреднением по ансамблю возможных реализаций) МГД-уравнений, систематически было использовано массово-взвешенное осреднение Фавра (Favre, 1969), позволяющее в значительной степени как упростить структуру осредненных гидромагнитных уравнений, так и выявить сверхзвуковые эффекты в развитой турбулентности при больших числах Рейнольдса, важные в зависимости от степени сжимаемости плазмы. С целью наиболее наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса вещества плазмы и флуктуирующего магнитного поля в работе приведены также различные уравнения энергетического баланса, позволяющие отслеживать возможные механизмы перекачки энергии из одной формы в другую, например, гравитационной и кинетической энергии осредненного движения в магнитную энергию и т.п. Особое внимание уделяется при этом турбулентной электродвижущей силе, которая играет центральную роль в появлении эффекта турбулентного динамо.

Следует также отметить, что в астро- и геофизических приложениях турбулентные движения исследуются с помощью нескольких уровней моделирования. В простейшем случае турбулентные потоки моделируются с помощью алгебраического градиентно-диффузионного приближения, которое наиболее широко используется в инженерных, геофизических и астрофизических областях (см. Marov, Kolesnichenko, 2013). Вместе с тем градиентно-транспортная модель, предполагающая локальность турбулентного переноса в пространстве и во времени и основанная на простых градиентных соотношениях, во многих случаях не является достаточно эффективной. В частности, в конвективной турбулентности при высоких числах Рэлея реализация нелокальных эффектов, обусловленных шлейфами и термами, является очень важной (Yokoi, 2018). Кроме этого, коэффициенты переноса получаются, как правило, путем анализа размерности, как это имеет место в теории длины смешивания. Для того чтобы получить более адекватную модель замыкания необходимо иметь более общие выражения для корреляций турбулентности, относящихся к уравнениям среднего поля. В работах (Yoshizawa, 1984; 1990; 1996; Yokoi, 2013) был разработан аналитический подход к замыканию осредненных МГД-уравнений (базирующийся на точных математических соотношениях в пространстве волновых чисел), который позволяет получить теоретические выражения (без учета эффектов сжимаемости) для неизвестных турбулентных корреляций в сильно нелинейных и неоднородных электропроводных жидкостях. В данной работе с помощью аналогичного подхода к замыканию, основанному в конечном счете на модельных дифференциальных уравнениях второго порядка для дескрипторов, предложена замкнутая система уравнений для сильно сжимаемой МГД-турбулентности.

Заметим, что используемое в работе приближение к моделированию гидромагнитной турбулентности является в определенной степени развитием ранее разработанного автором подхода, основанного на надежных термодинамических концепциях (см., например, Колесниченко, 2011; 2014а; 2014б; 2017; Kolesnichenko, Marov, 2007; 2008).

ОСРЕДНЕННЫЕ МГД-УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ПЛАЗМЫ

Средневзвешенное осреднение Фавра

В турбулентной космической плазме гидродинамическая скорость, температура, плотность и электромагнитные поля являются флуктуирующими величинами. Как известно (см., Favre, 1969), при построении модели развитой турбулентности в сжимаемой среде удобно использовать наряду с обычными (осредненными по Рейнольдсу) средними значениями $\bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x},t)$ некоторых гидромагнитных величин $\mathcal{A}(\mathbf{x},t)$ (таких как электромагнитное поле, плотность тока, массовая плотность вещества, давление, молекулярные потоки переноса массы, количества движения и энергии) так называемые средневзвешенные значения $\langle\mathcal{A}\rangle(\mathbf{x},t)$ (средние по Фавру), для некоторых других структурных параметров (например, температуры, внутренней энергии, энтропии, гидродинамической скорости и т.п.), задаваемые соотношением $\langle\mathcal{A}\rangle := \overline{\rho\mathcal{A}}\,/\,\bar\rho$. Таким образом, для обозначения осредненных значений физических величин далее используются два символа: черта сверху означает осреднение Рейнольдса по ансамблю возможных реализаций (времени и/или пространству), в то время как угловые скобки означают средневзвешенное осреднение по Фавру. Двойной штрих используется далее для обозначения мелкомасштабных флуктуаций на фоне среднего течения $\mathcal{A}''(\mathbf{x},t)$ тех величин $\mathcal{A}(\mathbf{x},t)$, которые осреднены по Фавру, $\mathcal{A}(\mathbf{x},t) = \langle\mathcal{A}\rangle + \mathcal{A}''$, $(\overline{\mathcal{A}''} \neq 0)$. Приведем здесь употребляемые далее в статье некоторые свойства средневзвешенного осреднения, которые легко выводятся из его определения и известных постулатов осреднения по Рейнольдсу (см., например, Колесниченко, Маров, 2009):

$$\overline{\langle\mathcal{A}\rangle}=\langle\mathcal{A}\rangle,\ \langle\bar{\mathcal{A}}\rangle=\bar{\mathcal{A}},\ \overline{\rho'\mathcal{A}'}=\overline{\rho'\mathcal{A}''},$$
$$\langle\mathcal{A}\rangle-\bar{\mathcal{A}}=\langle\mathcal{A}'\rangle=-\overline{\mathcal{A}''},\ \mathcal{A}''=\overline{\mathcal{A}''}+\mathcal{A}'=,\ \overline{\rho\mathcal{A}''}=0,$$
$$\overline{\mathcal{A}''}=-\overline{\rho'\mathcal{A}''}/\bar\rho,$$
$$(\mathcal{A}\mathcal{B})''=\langle\mathcal{A}\rangle\mathcal{B}''+\langle\mathcal{B}\rangle\mathcal{A}''+\mathcal{A}''\mathcal{B}''-\overline{\rho\mathcal{A}''\mathcal{B}''}/\bar\rho,$$
$$\overline{\rho\mathcal{A}\mathcal{B}}=\bar\rho\langle\mathcal{A}\rangle\langle\mathcal{B}\rangle+\overline{\rho\mathcal{A}''\mathcal{B}''},$$
$$\overline{\nabla\langle\mathcal{A}\rangle}=\nabla\langle\mathcal{A}\rangle,\ \overline{\rho\mathcal{A}\nabla\mathcal{B}}=\bar\rho\langle\mathcal{A}\rangle\nabla\langle\mathcal{B}\rangle+\overline{\bar\rho\mathcal{A}\nabla\mathcal{B}''},$$
$$\overline{\rho\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar\rho\langle\mathcal{A}\rangle\right)+\nabla\cdot\left(\bar\rho\langle\mathcal{A}\rangle\langle\mathbf{u}\rangle\right)+$$
$$+\nabla\cdot\overline{\rho\mathcal{A}''\mathbf{u}''}\equiv\bar\rho\frac{\mathrm{D}\langle\mathcal{A}\rangle}{\mathrm{D}t}+\nabla\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathcal{A})}.$$

Здесь $\mathrm{D}/\mathrm{D}t := \partial/\partial t + \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla$ — субстанциональная производная по времени для осредненного континуума; $\mathbf{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathcal{A})}(\mathbf{x},t) := \bar\rho\langle\mathcal{A}''\mathbf{u}''\rangle$ — турбулентный поток гидромагнитной величины $\mathcal{A}(\mathbf{x},t)$.

Далее, при получении осредненных уравнений магнитной гидродинамики использовано тождество

$$\overline{\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{A}''\mathcal{B}'')}\equiv\bar\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\langle\mathcal{A}''\mathcal{B}''\rangle+\nabla\cdot\overline{\rho\mathcal{A}''\mathcal{B}''\mathbf{u}''}=$$
$$=-\mathbf{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathcal{A})}\cdot\nabla\langle\mathcal{B}\rangle-\mathbf{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathcal{B})}\cdot\nabla\langle\mathcal{A}\rangle+$$
$$+\overline{\mathcal{A}''(\sigma_{\mathcal{B}}-\nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathcal{B}})}+\overline{\mathcal{B}''(\sigma_{\mathcal{A}}-\nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathcal{A}})},$$

которое легко может быть получено путем осреднения по Рейнольдсу субстанциональной производной $\mathrm{d}(\mathcal{A}''\mathcal{B}'')/\mathrm{d}t$ при использовании обобщенного балансового уравнения $\rho\,\mathrm{d}\mathcal{A}/\mathrm{d}t=-\nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathcal{A}}+\sigma_{\mathcal{A}}$ для регулярного режима движения проводящей жидкости. Здесь $\mathcal{A}(\mathbf{x},t)$ — скалярная, векторная или тензорная величина; поток $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},t)$ и скорость образования $\sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{x},t)$ представляют собой величины, тензорный ранг которых соответственно на один порядок выше или тот же, что и у параметра $\mathcal{A}(\mathbf{x},t)$.

Осредненные магнитогидродинамические уравнения

Рассмотрим космическую турбулентность при наличии стратификации проводящей жидкости и вращения изучаемого космического объекта. В астро-геофизическом контексте турбулентность имеет “магнитострофический” характер, при котором баланс сил в первую очередь определяется архимедовыми силами (силами плавучести), силами Кориолиса и силами Лоренца, связанными с внешним и генерируемым магнитным полем $\overline{\mathbf{B}}$. Далее теория гидромагнитной турбулентности рассматривается в рамках сжимаемой магнитной гидродинамики средних полей, для которой вводится масштабное разделение между средним полем и пульсациями и исследуется влияние пульсаций на среднее поле. При описании развитого турбулентного течения в виде суммы средней и пульсационной составляющих гидродинамических полей, осредненные МГД-уравнения, записанные (в международной системе единиц СИ) во вращающейся системе координат с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0$, имеют следующий вид (Kolesnichenko, Marov, 2008):

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\bar{\rho}\langle\mathbf{u}\rangle\right) = 0, \tag{1}$$

$$\bar{\rho}\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt} = -\nabla\left(\bar{p} + p_M\right) + \nabla\cdot\left(\bar{\tau} + \bar{\tau}_M + \mathbf{R}\right) - \\ - \bar{\rho}\nabla\psi - \bar{\rho}\mathbf{\Omega}_0\times\langle\mathbf{u}\rangle, \tag{2}$$

$$\bar{\rho}\frac{D\langle e\rangle}{Dt} + \nabla\cdot\mathbf{J}_{\langle e\rangle} = -\bar{p}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle + \bar{\tau} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \frac{\left|\bar{\mathbf{j}}\right|^2}{\sigma_e} + \\ + \mathbf{J}^{\mathrm{turb}}_{\langle v\rangle}\cdot\nabla\bar{p} - \overline{p'\nabla\cdot\mathbf{u}''} + \bar{\rho}\langle\varepsilon_\Sigma\rangle, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\nabla\times\overline{\mathbf{E}}, \quad \nabla\cdot\overline{\mathbf{B}} = 0, \tag{4}$$

$$\bar{\mathbf{j}} = \mu_0^{-1}\nabla\times\overline{\mathbf{B}} = \sigma_e\left(\overline{\mathbf{E}} + \mu_0^{-1}\langle\mathbf{u}\rangle\times\overline{\mathbf{B}} + \mathcal{G}_M\right). \tag{5}$$

Здесь $\bar{\rho}(\mathbf{x},t)$, $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t) := \overline{\rho\mathbf{u}}/\bar{\rho}$ — соответственно осредненные массовая плотность и гидродинамическая скорость электропроводящей жидкости ($\rho = \bar{\rho} + \rho'$; $\mathbf{u} = \langle\mathbf{u}\rangle + \mathbf{u}''$; $\mathbf{u}''(\mathbf{x},t)$ – турбулентная пульсация осредненной по Фавру скорости); $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$, $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$ — соответственно осредненные по Рейнольдсу напряженности электрического и магнитного поля; $\bar{p}(\mathbf{x},t) := \Re\bar{\rho}\langle\theta\rangle$ — осредненное газодинамическое давление; $\Re := \mathrm{R}/m$; R – газовая постоянная; m — средняя атомная масса (средняя масса на частицу в единицах m_p); $\tau(\mathbf{x},t) = \rho\nu\left(\nabla^s\mathbf{u} - \tfrac{2}{3}\mathbf{I}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)$ — тензор вязких напряжений, описывающий обмен импульсом между жидкими частицами под действием молекулярной кинематической вязкости ν; $\mathbf{R}(\mathbf{x},t) = -\bar{\rho}\langle\mathbf{u}''\mathbf{u}''\rangle$ — тензор турбулентных напряжений Рейнольдса;

$$\bar{\tau}_M(\mathbf{x},t) := \mu_0^{-1}\overline{\mathbf{B}\mathbf{B}} = \tau_M^{\mathrm{av}} + \tau_M^{\mathrm{turb}},\ \bar{p}_M := p_M^{\mathrm{av}} + p_M^{\mathrm{turb}} \tag{6}$$

— осредненный тензор магнитных натяжений Максвелла и осредненное давление магнитного поля соответственно;

$$\tau_M^{\mathrm{av}}(\mathbf{x},t) := \mu_0^{-1}\,\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{B}},\ \tau_M^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t) := \mu_0^{-1}\overline{\mathbf{B}'\mathbf{B}'} \tag{7}$$

— тензоры магнитных натяжений для осредненного магнитного поля и пульсационной составляющей магнитного поля соответственно;

$$p_M^{\mathrm{av}}(\mathbf{x},t) := \left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2/2\mu_0,\ p_M^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t) := \overline{\left|\mathbf{B}'\right|^2}/2\mu_0 \tag{8}$$

— давление осредненного магнитного поля и турбулентное магнитное давление электропроводящей жидкости; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума (которой для магнитного космического вещества можно пренебречь, полагая $\mu_0 = 1$; однако для удобства перехода к другим системам единиц измерения в уравнениях МГД параметр μ_0 далее будем оставлять); σ_e — удельный молекулярный коэффициент электропроводности; $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$ — осредненная плотность тока проводимости, фигурирующая в осредненных законах Ампера (4) и Ома (5); $\langle e\rangle(\mathbf{x},t) := \overline{\rho e}/\bar{\rho}$ — осредненное по Фавру удельное значение внутренней энергии $e(\mathbf{x},t)$ космического плазменного вещества в МГД-приближении (далее энергию $\langle e\rangle$ будем считать пропорциональной температуре $\langle\theta\rangle(\mathbf{x},t)$, $\langle e\rangle(\mathbf{x},t) := c_V\langle\theta\rangle$); $\gamma = c_P/c_V$ – показатель адиабаты; c_p, $c_V = \Re/(\gamma-1)$ — соответственно удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и теплоемкость при постоянном объеме (далее эти величины будем считать постоянными); $\bar{\mathbf{q}}_{\mathrm{rad}}(\mathbf{x},t)$ — осредненная плотность потока энергии, переносимого излучением.

$$\tilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t) := \mathbf{q}^{\mathrm{turb}} - \overline{p'\mathbf{u}''},\ \mathbf{q}^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t) \cong c_P\overline{\rho\theta''\mathbf{u}''} \quad (9)$$

– соответственно приведенный поток тепла и турбулентный тепловой поток (см. Колесниченко, 2017); $\mathbf{J}_{\langle e\rangle}(\mathbf{x},t) := \overline{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{turb}} + \overline{\mathbf{q}}_{\mathrm{rad}}$ — полный поток внутренней энергии осредненного движения плазмы; $\mathbf{J}^{\mathrm{turb}}_{\langle v\rangle}(\mathbf{x},t) := \overline{\rho(1/\rho)''\mathbf{u}''} = \overline{\mathbf{u}''}$ — турбулентный поток осредненного удельного объема, $\langle v\rangle \equiv 1/\overline{\rho}$; $\langle\varepsilon_\Sigma\rangle = \langle\varepsilon\rangle + \langle\varepsilon_M\rangle$, где

$$0 \le \overline{\rho}\langle\varepsilon\rangle := \overline{\tau : \nabla\mathbf{u}''},\ 0 \le \overline{\rho}\langle\varepsilon_M\rangle := \overline{|\mathbf{j}'|^2} / \sigma_e \quad (10)$$

— соответственно удельная скорость вязкой диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под действием молекулярной кинематической вязкости и удельная скорость диссипации энергии турбулентности под действием пульсирующего магнитного поля. Последнюю величину можно интерпретировать как теплоту Джоуля, связанную с пульсациями электрического тока в турбулентной проводящей среде.

Осредненное уравнение движения

При использовании преобразования

$$-\nabla p^{\mathrm{av}}_M + \nabla\cdot\tau^{\mathrm{av}}_M = -\nabla\left(\frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{2\mu_0}\right) + $$
$$+ \nabla\cdot\left(\frac{\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{B}}}{\mu_0}\right) = -\frac{1}{\mu_0}\overline{\mathbf{B}}\times\nabla\times\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{j}}\times\overline{\mathbf{B}} \quad (11)$$

осредненному уравнению движения плазмы (2) можно придать следующий вид:

$$\overline{\rho}\frac{D\langle\mathbf{u}\rangle}{Dt} \cong -\nabla\left(\overline{p} + p^{\mathrm{turb}}_M\right) + $$
$$+ \nabla\cdot\mathbf{R}_K + \overline{\mathbf{j}}\times\overline{\mathbf{B}} - \overline{\rho}\nabla\psi - \overline{\rho}\,\boldsymbol{\Omega}_0\times\langle\mathbf{u}\rangle. \quad (12)$$

Здесь

$$\mathbf{R}_K(\mathbf{x},t) := \mathbf{R} + \tau^{\mathrm{turb}}_M = -\overline{\rho\mathbf{u}''\mathbf{u}''} + \overline{\mathbf{B}'\mathbf{B}'}/\mu_0 \quad (13)$$

— полный тензор турбулентных напряжений в плазме (так называемый кинетический тензор напряжений для электропроводной жидкости, находящейся в магнитном поле). Заметим, что приближенная форма (12) уравнения движения (2) справедлива только в случае сильно развитой турбулентности, когда осредненным тензором вязких (молекулярных) напряжений $\overline{\tau}(\mathbf{x},t)$ можно пренебречь по сравнению с тензором турбулентных напряжений $\mathbf{R}(\mathbf{x},t)$.

Уравнение магнитной индукции для средних полей

Исключая из уравнений Максвелла (4) электрическое поле $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$, а из закона Ома (5) ток проводимости $\overline{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$, можно получить, при использовании формулы векторного анализа $\nabla\times\nabla\times\mathbf{a} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}$, следующее уравнение магнитной индукции средних полей:

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{\mathbf{B}}}{\overline{\rho}}\right) = \left(\overline{\mathbf{B}}\cdot\nabla\right)\langle\mathbf{u}\rangle + \nabla\cdot\mathbf{R}_M + \nu_M\nabla^2\overline{\mathbf{B}}, \quad (14)$$

являющееся одним из основных уравнений осредненной турбулентной магнитной гидродинамики. Здесь

$$\mathbf{R}_M(\mathbf{x},t) := -\left(\overline{\mathbf{u}''\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B}\mathbf{u}''}\right) \quad (15)$$

– так называемый магнитный тензор Рейнольдса; $\nu_M := 1/\mu_0\sigma_e$ – коэффициент молекулярной магнитной вязкости, имеющий такую же размеренность, как и коэффициент кинематической вязкости ν, т.е. см^2/с.

В осредненном уравнении индукции (14) присутствует новый член

$$\nabla\cdot\mathbf{R}_M := \overline{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u}''} - \overline{(\mathbf{u}''\cdot\nabla)\mathbf{B}} -$$
$$- \overline{\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{u}''} = \nabla\times\left(\overline{\mathbf{u}''\times\mathbf{B}}\right) = \nabla\times\mathcal{G}_M, \quad (16)$$

играющий роль дополнительного источника, генерирующего крупномасштабное магнитное поле $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$ за счет мелкомасштабных спиральных движений. Здесь

$$\mathcal{G}_M(\mathbf{x},t) := \overline{\mathbf{u}''\times\mathbf{B}} = \overline{\rho\mathbf{u}''\times(\mathbf{B}/\rho)''},$$

или

$$(\mathcal{G}_M)_i = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\mathbf{R}_M)_{jk} \quad (17)$$

– турбулентная электродвижущая сила, порождаемая мелкомасштабными флуктуациями поля скоростей и магнитного поля, которая фигурирует также в осредненном законе Ома (5).

Следует отметить, что одной из основных целей полуэмпирической теории МГД-турбулентности как раз и является конструирование специального замыкающего соотношения для электродвижущей силы $\mathcal{G}_M(\mathbf{x},t)$ как функции средних полей $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$ и $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$, с тем, чтобы при известном поле скоростей $\langle\mathbf{u}\rangle$ можно было найти магнитное поле $\overline{\mathbf{B}}$ из уравнения индукции (14).

Система уравнений (1)–(3) и (14) должна быть дополнена замыкающими соотношениями для турбулентных потоков, а также выражениями для термодинамических и переносных характеристик. При этом граничные и начальные условия для осредненных структурных параметров плазмы не отличаются от соответствующих условий для неэлектропроводящих сред, но для среднего магнитного поля необходимо привлекать дополнительные условия.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАСШТАБА СРЕДНЕГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕЩЕСТВА ПЛАЗМЫ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В осредненном турбулентном течении проводящей жидкости, по сравнению с его регулярным аналогом, существует большое количество всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергии движущихся элементарных объемов вещества, вносящих свой вклад в сохраняющуюся полную энергию материально-полевого плазменного континуума (Колесниченко, 2017).

Балансовое уравнение для осредненной механической энергии плазмы

Уравнение для механической энергии может быть получено путем скалярного умножения уравнения движения (2) на вектор $\langle\mathbf{u}\rangle$. В результате получим:

$$\bar\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\left|\langle\mathbf{u}\rangle\right|^2/2+\psi\right)+\nabla\cdot$$
$$\cdot\left\{-\nabla(\bar{\mathrm{p}}+\bar{\mathrm{p}}_{\mathrm{M}})\langle\mathbf{u}\rangle-\left(\mathbf{R}_K+\tau_{\mathrm{M}}^{\mathrm{av}}\right)\cdot\langle\mathbf{u}\rangle\right\}=$$
$$=(\bar p+\mathrm{p}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{turb}})\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle-\left(\mathbf{R}_{\mathrm{K}}+\tau_{\mathrm{M}}^{\mathrm{av}}\right):\nabla\langle\mathbf{u}\rangle. \quad (18)$$

Уравнение притока тепла для осредненного движения турбулентной плазмы

Энергетическое уравнение (3) можно переписать в виде

$$\bar\rho\frac{\mathrm{D}\langle e\rangle}{\mathrm{D}t}+\nabla\cdot\left(\bar{\mathbf{q}}_{\mathrm{rad}}+\tilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{turb}}\right)\cong$$
$$\cong-\left(\bar{\mathrm{p}}+\mathrm{p}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{turb}}\right)\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle+\mathbf{R}_{\mathrm{K}}:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle+\frac{\left|\bar{\mathbf{j}}\right|^2}{\sigma_e}+\frac{\mathbf{R}_{\mathrm{M}}:\nabla\bar{\mathbf{B}}}{\mu_0}, \quad (19)$$

справедливом, однако, только в случае сильно развитого турбулентного поля, при котором в структуре пульсирующих величин $\mathbf{u}''$ и $\mathbf{B}'$ устанавливается такое стационарно-равновесное состояние, при котором полная турбулентная энергия плазмы (см. (35)

$$\langle b_\Sigma\rangle:=\langle b\rangle+\langle b_{\mathrm{M}}\rangle=\overline{\left|\mathbf{u}''\right|^2}/2\bar\rho+\overline{\left|\mathbf{B}'\right|^2}/2\bar\rho\mu_0 \quad (20)$$

почти не меняется как во времени, так и в пространстве, $\bar\rho\,\mathrm{D}\langle b_\Sigma\rangle/\mathrm{D}t+\overline{\nabla\cdot\mathbf{J}}_{\langle b_\Sigma\rangle}\cong 0$ (Колесниченко, 2017). Здесь $\bar\rho\langle b\rangle:=\overline{\left|\mathbf{u}''\right|^2}/2$ — турбулентная энергия вещества плазмы; $\bar\rho\langle b_{\mathrm{M}}\rangle:=\overline{\left|\mathbf{B}'\right|^2}/2\mu_0$ — турбулентная энергия магнитного поля. В этом случае имеет место соотношение

$$-\mathrm{p}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{turb}}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle+\mathbf{R}_{\mathrm{K}}:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle+\mu_0^{-1}\mathbf{R}_{\mathrm{M}}:\nabla\bar{\mathbf{B}}\cong$$
$$\cong\mathbf{J}_{\langle\mathrm{v}\rangle}^{\mathrm{turb}}\cdot\nabla\bar{\mathrm{p}}-\overline{\mathrm{p}'\left(\nabla\cdot\mathbf{u}''\right)}+\bar\rho\langle\varepsilon_\Sigma\rangle, \quad (21)$$

с помощью которого получено уравнение (19). Заметим также, что при применении формулы

$$\mu_0^{-1}\mathbf{R}_{\mathrm{M}}:\nabla\bar{\mathbf{B}}=-\mathcal{G}_{\mathrm{M}}\cdot\bar{\mathbf{j}} \quad (22)$$

последнее слагаемое в правой части уравнения (19) может быть записано в виде $-\mathcal{G}_{\mathrm{M}}\cdot\bar{\mathbf{j}}$.

Уравнение для турбулентной энергии вещества плазмы

Уравнение для турбулентной энергии вещества $\langle b\rangle:=\overline{\left|\mathbf{u}''\right|^2}/2\bar\rho$ имеет вид (Колесниченко, 2017):

$$\bar\rho\frac{\mathrm{D}\langle b\rangle}{\mathrm{D}t}+\nabla\cdot\mathbf{J}_{\langle b\rangle}=\mathbf{R}:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle-\mathbf{J}_{\langle\mathrm{v}\rangle}^{\mathrm{turb}}\cdot\nabla\bar{\mathrm{p}}+\overline{\mathrm{p}'\nabla\cdot\mathbf{u}''}-$$
$$-\mathcal{G}_{\mathrm{M}}\cdot\bar{\mathbf{j}}-\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\overline{\mathbf{j}'\times\mathbf{B}'}+\overline{\mathbf{j}'\cdot\mathbf{E}'}-\bar\rho\langle\varepsilon_\Sigma\rangle. \quad (23)$$

В случае сильно развитой турбулентности это уравнение, при учете формул (21) и (22), может быть переписано в более простом виде:

$$\bar\rho\frac{\mathrm{D}\langle b\rangle}{\mathrm{D}t}+\nabla\cdot\mathbf{J}_{\langle b\rangle}=\mathrm{p}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{turb}}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle-$$
$$-\tau_{\mathrm{M}}^{\mathrm{turb}}:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle-\overline{\mathbf{j}'\times\mathbf{B}'}\cdot\langle\mathbf{u}\rangle+\overline{\mathbf{j}'\cdot\mathbf{E}'}. \quad (24)$$

Здесь $\mathbf{J}_{\langle b\rangle}(\mathbf{x},t):=\left\{\overline{\rho(b+\mathrm{p}'/\rho)\mathbf{u}''}-\overline{\tau\cdot\mathbf{u}''}\right\}$ — поток турбулентной энергии электропроводного вещества.

Балансовое уравнение для полной осредненной энергии вещественной составляющей плазмы

Уравнение для величины $E_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{sub}}(\mathbf{x},t):=\left\{\left|\langle\mathbf{u}\rangle\right|^2/2+\langle e\rangle+\langle b\rangle+\psi\right\}$ может быть получено путем суммирования уравнений (18), (19) и (24); в результате будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}E_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{sub}}}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_{E_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{sub}}} = $$
$$= \bar{\mathrm{p}}_{\mathrm{M}}\,\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle - \bar{\tau}_{\mathrm{M}} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \left|\bar{\mathbf{j}}\right|^2/\sigma_{\mathrm{e}} -$$
$$- \mathrm{G}_{\mathrm{M}}\cdot\bar{\mathbf{j}} - \langle\mathbf{u}\rangle\cdot\overline{\mathbf{j}'\times\mathbf{B}'} + \overline{\mathbf{j}'\cdot\mathbf{E}'} \equiv \aleph\,. \qquad (25)$$

Здесь

$$\mathbf{J}_{E_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{sub}}}(\mathbf{x},t) := \Big\{\bar{\mathbf{q}}_{\mathrm{rad}} + \mathbf{q}^{\mathrm{turb}} + \overline{\rho(b + \mathrm{p}'/\rho)\,\mathbf{u}''} -$$
$$- \overline{\tau\cdot\mathbf{u}''} + \left(\bar{\mathrm{p}} + \mathrm{p}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{turb}}\right)\langle\mathbf{u}\rangle - \left(\tau_{\mathrm{M}}^{\mathrm{av}} + \mathbf{R}_{\mathrm{K}}\right)\cdot\langle\mathbf{u}\rangle\Big\} \qquad (26)$$

– поток полной осредненной энергии вещества турбулентной плазмы.

Энергетические уравнения для энергии магнитной составляющей сжимаемой турбулентной плазмы

При моделировании турбулентной плазмы следует принимать во внимание также различные виды энергии, связанные с влиянием среднего поля (осредненных скорости, плотности и температуры потока) на развитие турбулентности при взаимодействии магнитного поля и сжимаемой плазмы.

Балансовое уравнение для осредненной магнитной энергии плазмы

Уравнение для магнитной энергии плазмы $\langle E_{\mathrm{M}}\rangle := \overline{|\mathbf{B}|^2}/2\mu_0\bar{\rho} = E_{\mathrm{M}}^{\mathrm{av}} + \langle b_{\mathrm{M}}\rangle$ имеет вид

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}\langle E_{\mathrm{M}}\rangle}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_{\langle E_{\mathrm{M}}\rangle}^{\mathrm{turb}} = -\aleph. \qquad (27)$$

где

$$E_{\mathrm{M}}^{\mathrm{av}} := \left|\bar{\mathbf{B}}\right|^2/2\mu_0\bar{\rho},\ \langle b_{\mathrm{M}}\rangle := \overline{\left|\mathbf{B}'\right|^2}/2\mu_0\bar{\rho} \qquad (28)$$

– плотность магнитной энергии среднего поля и плотность турбулентной магнитной энергии соответственно;

$$\mathbf{J}_{\langle E_{\mathrm{M}}\rangle}^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t) := \Big\{\overline{|\mathbf{B}|^2\mathbf{u}''}/2\mu_0 + \overline{\mathrm{p}_{\mathrm{M}}\,\mathbf{u}''} -$$
$$- \overline{\tau_{\mathrm{M}}\cdot\mathbf{u}''} - \nu_{\mathrm{M}}\nabla\,\bar{\mathrm{p}}_{\mathrm{M}} + \nu_{\mathrm{M}}\nabla\cdot\bar{\tau}_{\mathrm{M}}\Big\} \qquad (29)$$

– турбулентный поток магнитной энергии плазмы. Следует отметить, что поскольку правые части уравнений (25) и (27) отличаются только знаком, то плотность полной энергии осредненного континуума $E_{\mathrm{tot}}(\mathbf{x},t) = E_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{sub}} + \langle E_{\mathrm{M}}\rangle$, равная сумме плотностей (на единицу массы), осредненной энергии вещества плазмы $E_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{sub}}$ и осредненной магнитной энергии $\langle E_{\mathrm{M}}\rangle$, сохраняется.

Закон сохранения полной энергии системы

Для целей моделирования электропроводной турбулентности часто необходимо использовать закон сохранения осредненной полной энергии космической системы E_{tot}, равной сумме осредненной полной энергии электропроводного вещества космического объекта $\langle E\rangle_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{sub}} := \left\{|\langle\mathbf{u}\rangle|^2/2 + \langle e\rangle + \langle b\rangle + \psi\right\}$ и осредненной энергии электромагнитного поля $\langle E\rangle_{\mathrm{M}}(\mathbf{x},t) := E_{\mathrm{M}}^{\mathrm{av}} + \langle b_{\mathrm{M}}\rangle$. Суммируя уравнения (25) и (27), в результате получим

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}\,E_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_{E_{\mathrm{tot}}}^{\mathrm{turb}} = Q_{\mathrm{rad}}. \qquad (30)$$

Здесь

$$\mathbf{J}_{E_{\mathrm{tot}}}^{\mathrm{turb}} = \Big\{\mathbf{q}^{\mathrm{turb}} + \bar{\mathrm{p}}\langle\mathbf{u}\rangle - \left(\left|\bar{\mathbf{B}}\right|^2/2\mu_0\right)\langle\mathbf{u}\rangle +$$
$$+ \overline{\mathbf{q}_{\mathrm{Poynt}}} - \mathbf{R}\cdot\langle\mathbf{u}\rangle + \overline{\rho b\mathbf{u}''}\Big\}, \qquad (31)$$

– диффузионный поток полной энергии электропроводной среды.

$$\overline{\mathbf{q}_{\mathrm{Poynt}}} := \overline{\mathbf{E}\times\mathbf{B}} = \frac{1}{\mu_0}\Big\{\overline{|\mathbf{B}|^2\,\mathbf{u}} - \overline{(\mathbf{B}\mathbf{B})\cdot\mathbf{u}} -$$
$$- \nu_{\mathrm{M}}\nabla\overline{|\mathbf{B}|^2}/2 + \nu_{\mathrm{M}}\nabla\cdot\overline{\mathbf{B}\mathbf{B}}\Big\} \qquad (32)$$

– осредненный вектор Пойнтинга, имеющий смысл плотности потока энергии электромагнитного поля;

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{rad}} := -\nabla\cdot\bar{\mathbf{q}}_{\mathrm{rad}} = \mathrm{A} - \mathrm{R} =$$
$$= \int_0^\infty\int_\Omega \rho\kappa_{\nu a}I_\nu\,\mathrm{d}\mathbf{n}\,\mathrm{d}\nu - 4\pi\int_0^\infty \rho\kappa_{\nu a}\mathrm{B}_\nu\,\mathrm{d}\nu, \qquad (33)$$

где ν, $I_\nu(\mathbf{x},\mathbf{n},t)$ и $\mathrm{B}_\nu(\mathbf{x},\mathbf{n},t)$ – частота, спектральная интенсивность и функция внутренних источников излучения соответственно; $\mathbf{n}$ – направление движения фотонов, $\kappa_{\nu a}$– истинный коэффициент поглощения излучения веществом диска (спектральная непрозрачность). Величина $\mathcal{A}$ в выражении (33) соответствует поглощаемой, а величина $\mathcal{R}$ – спонтанно излучаемой радиационной энергии в единице объема в единицу времени. Возможны несколько режимов переноса излучения, которые применимы в различных областях космического объекта в зависимости от темпа аккреции, массы, энергии и т.п. В частности, если полная оптическая толщина протозвезды $\mathrm{d}\tau_\nu = \rho\kappa_{\nu a}\mathrm{d}s$ вдоль направления распространения s превосходит единицу, фотоны переносятся к его поверхности путем диффузии. В общем случае спектральная интенсивность $I_\nu(\mathbf{x},\mathbf{n},t)$, входящая в формулу (33), должна определяться в процессе решения уравнения переноса излучения.

В МГД-приближении вектор Пойнтинга $\overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}}$ может быть преобразован к виду

$$\overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}} = \left(\left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2 / 2\mu_0 + \bar{\rho}\langle b_{\text{M}}\rangle + \bar{\text{p}}_{\text{M}} \right)\langle\mathbf{u}\rangle - $$

$$- \bar{\tau}_{\text{M}} \cdot \langle\mathbf{u}\rangle + \mu_0^{-1}\overline{\left(\left|\mathbf{B}\right|^2 - \mathbf{B}\mathbf{B}\right) \cdot \mathbf{u}''} -$$

$$-\mu_0^{-1}\nu_{\text{M}}\nabla \cdot \left(\tfrac{1}{2}\left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2 - \overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{B}} \right) - \nu_{\text{M}}\nabla \text{p}_{\text{M}}^{\text{turb}} + \nu_{\text{M}}\nabla \cdot \tau_{\text{M}}^{\text{turb}}, \quad (34)$$

причем для сильно развитой турбулентности последние два малых члена, включающие коэффициент ν_{M}, для большинства областей космического объекта (например, аккреционного диска и короны) могут быть опущены (Lazarian, Vishniac, 1999). Их следует принимать во внимание только в областях высоких градиентов магнитного поля, например, в области стохастического перезамыкания магнитных силовых линий.

Если использовать осредненный вектор Пойнтинга

$$\overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}(\mathbf{x},t)} := \left\{ \overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}} = \overline{\rho(E_{\text{M}} + \text{p}_{\text{M}}/\rho)\mathbf{u}} - \right.$$

$$\left. - \overline{\tau_{\text{M}} \cdot \mathbf{u}} - \nu_{\text{M}}\nabla\,\bar{\text{p}}_{\text{M}} + \nu_{\text{M}}\nabla \cdot \bar{\tau}_{\text{M}} \right\}, \quad (35)$$

то уравнению (27) для осредненной магнитной энергии можно придать следующий балансовый вид:

$$\partial\left(\bar{\rho}\langle E_{\text{M}}\rangle\right) / \partial t + \nabla \cdot \left\{ \overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}} - \bar{\text{p}}_{\text{M}}\langle\mathbf{u}\rangle + \right.$$

$$\left. + \bar{\tau}_{\text{M}} \cdot \langle\mathbf{u}\rangle \right\} = -\aleph, \quad (36)$$

эквивалентный, как легко проверить, осредненному закону сохранения энергии электромагнитного поля

$$\partial\left(\bar{\rho}\langle E_{\text{M}}\rangle\right) / \partial t = -\nabla \cdot \overline{\mathbf{q}_{\text{Poynt}}} - \overline{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}. \quad (37)$$

Уравнение для магнитной энергии среднего поля $\left|\overline{\mathbf{B}}\right|^2 / 2\mu_0\bar{\rho}$

Умножая скалярно осредненное уравнение индукции (14) на $\mu_0^{-1}\overline{\mathbf{B}}$ и, учитывая справедливое для осредненных полей соотношение

$$\mu_0^{-1}\overline{\mathbf{B}}\nabla^2\overline{\mathbf{B}} = -(\nu_{\text{M}}\sigma_e)^{-1}\left|\bar{\mathbf{j}}\right|^2 -$$

$$-\nabla \cdot \left\{ -\nabla \text{p}_{\text{M}}^{\text{av}} + \nabla \cdot \tau_{\text{M}}^{\text{av}} \right\}, \quad (38)$$

в результате получим

$$\bar{\rho}\frac{\text{D}}{\text{D}t}E_{\text{M}}^{\text{av}} + \nabla \cdot \left\{ -\nu_{\text{M}}\nabla \text{p}_{\text{M}}^{\text{av}} + \nu_{\text{M}}\nabla \cdot \tau_{\text{M}}^{\text{av}} \right\} =$$

$$= -\text{p}_{\text{M}}^{\text{av}}\nabla \cdot \langle\mathbf{u}\rangle + \tau_{\text{M}}^{\text{av}} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \mu_0^{-1}\overline{\mathbf{B}} \times \text{G}_{\text{M}} - \sigma_{\text{e}}^{-1}\left|\bar{\mathbf{j}}\right|^2. \quad (39)$$

Уравнению (39) можно придать более наглядный вид, если воспользоваться выражением $\left|\bar{\mathbf{j}}\right|^2 = \mu_0^{-2}\left(\nabla \times \overline{\mathbf{B}}\right)^2$ и формулой векторного анализа $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b})$; в результате будем иметь:

$$\bar{\rho}\frac{\text{D}}{\text{D}t}E_{\text{M}}^{\text{av}} + \nabla \cdot \left\{ -\nu_{\text{M}}\nabla \text{p}_{\text{M}}^{\text{av}} + \nu_{\text{M}}\nabla \cdot \tau_{\text{M}}^{\text{av}} - \mu_0^{-1}\,\text{G}_{\text{M}} \times \overline{\mathbf{B}} \right\} =$$

$$= -\text{p}_{\text{M}}^{\text{av}}\nabla \cdot \langle\mathbf{u}\rangle + \tau_{\text{M}}^{\text{av}} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \text{G}_{\text{M}} \cdot \bar{\mathbf{j}} - \left|\bar{\mathbf{j}}\right|^2 / \sigma_{\text{e}}. \quad (40)$$

Из правой части этого уравнения видно, что магнитная энергия $E_{\text{M}}^{\text{av}}(\mathbf{x},t)$ убывает за счет омической диссипации (последний член) и возрастает в результате перехода кинетической энергии среднего движения (второй член) и турбулентной кинетической энергии вещества (третий член) в магнитную энергию среднего поля.

Уравнение для турбулентной магнитной энергии

Уравнение для турбулентной магнитной энергии $\langle b_{\text{M}}\rangle := \left|\mathbf{B}'\right|^2 / 2\mu_0\bar{\rho}$ может быть получено из разности уравнений (26) и (33):

$$\bar{\rho}\frac{\text{D}\langle b_{\text{M}}\rangle}{\text{D}t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{\langle b_{\text{M}}\rangle} = -\text{p}_{\text{M}}^{\text{turb}}\nabla \cdot \langle\mathbf{u}\rangle +$$

$$+ \tau_{\text{M}}^{\text{turb}} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{u}\rangle \cdot \overline{\mathbf{j}' \times \mathbf{B}'} - \overline{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}'}, \quad (41)$$

где

$$\mathbf{J}_{\langle b_{\text{M}}\rangle}(\mathbf{x},t) := \left\{ \overline{\rho\,(E_{\text{M}} + \text{p}_{\text{M}}/\rho)\mathbf{u}_i''} - \right.$$

$$\left. - \overline{\tau_{\text{M}} : \mathbf{u}''} + \mu_0^{-1}\text{G}_{\text{M}} \times \overline{\mathbf{B}} \right\} \quad (42)$$

— диффузионный поток турбулентной магнитной энергии плазмы. Из этого уравнения видно, что физической причиной возникновения и поддержания турбулентной магнитной энергии (турбулентного магнитного поля) являются турбулентные электрические токи (слагаемое $\langle\mathbf{u}\rangle \cdot \overline{\mathbf{j}' \times \mathbf{B}'}$), возникающие в среде при турбулентных пульсациях скорости и магнитного поля. Последний член уравнения (41) описывает убывание турбулентной магнитной энергии за счет перехода ее в турбулентную энергию вещества (см. (24)).

Балансовое уравнение для полной турбулентной энергии плазмы

Складывая теперь (24) и (41), получим балансовое уравнение для полной энергии турбулентности $\langle b_\Sigma\rangle(\mathbf{x},t) := \langle b\rangle + \langle b_\mathrm{M}\rangle$ электропроводной среды в виде

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}\langle b_\Sigma\rangle}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_{\langle b_\Sigma\rangle} = -\mathrm{p}_\mathrm{M}^{\mathrm{turb}}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle + \mathbf{R}_\mathrm{K} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle - \\ - \Gamma_\mathrm{M}\cdot\bar{\mathbf{j}} - \mathbf{J}_{\langle \mathrm{v}\rangle}^{\mathrm{turb}}\cdot\nabla\bar{\mathrm{p}} + \overline{\mathrm{p}'\nabla\cdot\mathbf{u}''} - \bar{\rho}\langle\varepsilon_\Sigma\rangle, \tag{43}$$

где

$$\mathbf{J}_{\langle b_\Sigma\rangle} := \left\{\overline{\left(\left|\mathbf{u}''\right|^2/2 + \left|\mathbf{B}'\right|^2/2\mu_0 - \mathrm{p}'\right)\mathbf{u}''} - \\ - \mu_0^{-1}\left[\overline{(\mathbf{B}'\cdot\mathbf{u}'')}\,\bar{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{u}''\mathbf{B}}\cdot\bar{\mathbf{B}})\right]\right\} \tag{44}$$

– диффузионный поток полной (кинетической плюс магнитной) турбулентной энергии электропроводной жидкости.

Следует отметить, что в пульсационном магнитном поле может содержаться значительная (а по некоторым оценкам даже большая) часть общей энергии турбулентности космической системы. Из уравнения (43) видно, что джоулева диссипация (член $\bar{\rho}\langle\varepsilon_\mathrm{M}\rangle$) приводит к более быстрому затуханию возмущения плазмы, чем в случае, когда имеется лишь вязкая диссипация, т.е. непосредственное взаимодействие поля с возмущениями течения всегда приводит к повышению устойчивости течения плазмы. С другой стороны, магнитное поле может взаимодействовать и с осредненным течением жидкости. При этом скорость кинематического обмена $\mathbf{R}_\mathrm{K} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle$ между кинетической энергией осредненного движения жидкости (см. (18)) и кинетической энергией пульсационного движения системы зависит как от корреляции между пульсациями составляющих скоростей $\mathbf{R}$ и пульсациями компонент магнитного поля $\mathbf{R}_\mathrm{M}$, так и от сдвига средней скорости $\nabla\langle\mathbf{u}\rangle$, т.е. тензор дисторсии оказывает определенное воздействие на устойчивость течения.

ВЫВОД МЕТОДАМИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ ЗАМЫКАЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Базовая система осредненных гидромагнитных уравнений, состоящая из уравнений (1)–(3) и (14), является незамкнутой, поскольку содержит наряду со средними значениями параметров состояния, таких как $\bar{\rho}(\mathbf{x},t)$, $\langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x},t)$, $\bar{\mathrm{p}}(\mathbf{x},t)$, $\langle\theta\rangle(\mathbf{x},t)$, $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$, и их производными также и неопределенные вторые корреляционные моменты (например, турбулентные потоки $\mathbf{q}^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{R}_\mathrm{K}(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{R}_\mathrm{M}(\mathbf{x},t)$), которые появляются в результате осреднения исходных (мгновенных) нелинейных МГД-уравнений. В связи с этим обстоятельством возникает главная проблема феноменологической теории гидромагнитной турбулентности – проблема замыкания, связанная с необходимостью конструирования определяющих соотношений для различных корреляционных моментов, которые в случае рассматриваемой здесь спиральной турбулентности имеют свои специфические особенности. Воспользуемся для этой цели классическими методами неравновесной термодинамики (см. де Гроот, Мазур, 1964).

Уравнение баланса осредненной энтропии

Термодинамический анализ турбулентной жидкости проведем в предположении, что одноточечные корреляции $\langle\mathcal{A}''\mathcal{B}''\rangle$ для всех пульсирующих термодинамических параметров $\mathcal{A}(\mathbf{x},t)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{x},t)$ (за исключением скорости течения $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$) малы по сравнению с членами первого порядка $\langle\mathcal{A}\rangle\langle\mathcal{B}\rangle$ и могут быть опущены. В работе (Колесниченко, 2017) было показано, что в этом случае фундаментальное тождество Гиббса для осредненной составляющей турбулентного движения электропроводной жидкости имеет вид

$$\langle\theta\rangle\frac{\mathrm{D}\langle S\rangle}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}\langle e\rangle}{\mathrm{D}t} + \bar{\mathrm{p}}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right). \tag{45}$$

Исключая из этого уравнения субстанциональные производные от параметров $\langle e\rangle(\mathbf{x},t)$ и $\bar{\rho}(\mathbf{x},t)$ с помощью уравнений (1) и (3), получим уравнение баланса для осредненной энтропии $\langle S\rangle(\mathbf{x},t)$ среды в следующем явном виде:

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\langle S\rangle + \nabla\cdot\left\{\frac{\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}}_{\mathrm{rad}} + \tilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{turb}}}{\langle\theta\rangle}\right\} = \\ = \sigma_{\langle S\rangle} = \sigma_{\langle S\rangle}^{(i)} + \sigma_{\langle S\rangle}^{(e)}, \tag{46}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\langle S\rangle}^{(i)}(\mathbf{x},t) := \dfrac{1}{\langle\theta\rangle}\left\{\begin{array}{l} -\mathbf{J}_{\langle S\rangle}\cdot\nabla\langle\theta\rangle + \\ +\bar{\tau} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \mu_0^{-1}\nu_\mathrm{M}\left(\nabla\times\bar{\mathbf{B}}\right)^2 \end{array}\right\} \ge 0, \\ \sigma_{\langle S\rangle}^{(e)}(\mathbf{x},t) := \dfrac{1}{\langle\theta\rangle}\left\{\begin{array}{l} -\overline{\mathrm{p}'\nabla\cdot\mathbf{u}''} + \\ +\mathbf{J}_\mathrm{v}^{\mathrm{turb}}\cdot\nabla\bar{\mathrm{p}} + \bar{\rho}\langle\varepsilon_\Sigma\rangle \end{array}\right\} \equiv \dfrac{\mathfrak{I}}{\langle\theta\rangle}. \end{cases} \tag{47}$$

Здесь, величина $\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle}(\mathbf{x},t)$, определяющая скорость локального производства энтропии $\langle S\rangle(\mathbf{x},t)$ жидкости (обусловленного необратимыми процессами переноса внутри подсистемы осредненного движения), всегда положительна. Однако величина $\sigma^{(e)}_{\langle S\rangle}(\mathbf{x},t)$, относящаяся к стоку или притоку осредненной энтропии, может быть разной по знаку и, как будет ясно из дальнейшего, отражает обмен энтропией между подсистемами осредненного движения и подсистемой турбулентного хаоса (Колесниченко, 2017). Из выражения (47) следует, что одной только осредненной энтропии жидкости $\langle S\rangle(\mathbf{x},t)$ недостаточно для адекватного описания всех особенностей турбулентного течения, поскольку для этой величины не выполняется второй закон термодинамики. Кроме этого, энтропия $\langle S\rangle(\mathbf{x},t)$ не связана явно с какими-либо параметрами пульсирующего турбулентного хаоса, характеризующими его внутреннюю структуру, в частности с такими ключевыми характеристиками турбулентности, как кинетическая энергия турбулентности $\langle b\rangle(\mathbf{x},t)$ и энергия турбулентности магнитного поля $\langle b_{\mathrm{M}}\rangle(\mathbf{x},t)$. Именно по этой причине при конструировании адекватной термодинамической модели гидромагнитной турбулентности необходим ввод в рассмотрение подсистемы турбулентного хаоса.

Уравнения баланса энтропии и производство энтропии для подсистемы турбулентного хаоса

Термодинамику турбулентной электропроводной жидкости удобно анализировать в рамках “двухжидкостного” континуума, состоящего из двух открытых и взаимосвязанных подсистем: подсистемы осредненного движения, которая получается в результате теоретико-вероятностного осреднения МГД-уравнений, и подсистемы турбулентного хаоса, связанной с пульсационным движением среды (Колесниченко, 2011). Будем далее считать, что элементарный объем $\mathrm{d}\mathbf{x}$ турбулентного вещества может быть охарактеризован дополнительными экстенсивными переменными состояния, такими как плотность внутренней энергии $e^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ и энтропия $S^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ турбулизации вещества, а также интенсивными переменными состояния, в качестве которых будем использовать обобщенную температуру пульсационного поля турбулентности $\theta^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ (величину, характеризующую степень интенсивности турбулентных пульсаций) и давление турбулизации $\mathrm{p}^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$. При этом важно иметь в виду, что подобные термодинамические характеристики подсистемы турбулентного хаоса (рассматриваемые далее в качестве первичных концепций) вводятся здесь *a priori* для обеспечения связности предложенного формального подхода и не имеют, в общем случае, точной физической интерпретации.

Следуя теперь методу Гиббса, выберем в качестве локального характеристического функционала, содержащего все термодинамические сведения о подсистеме турбулентного хаоса в локально-равновесном (либо в стационарном состоянии), фундаментальное уравнение для обобщенной энтропии: $S^{\mathrm{turb}} = S^{\mathrm{turb}}\left(e^{\mathrm{turb}}, \langle \mathrm{v}\rangle\right)$, которое будем считать заданным *a priori*. Примем теперь, как это обычно делается при формализованном построении классической термодинамики, следующие определения сопряженных переменных $\theta^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ и $\mathrm{p}^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ (считая, что все указанные производные положительны):

$$1/\theta^{\mathrm{turb}} := \left\{\partial S^{\mathrm{turb}}/e^{\mathrm{turb}}\right\}_{\langle \mathrm{v}\rangle},$$
$$\mathrm{p}^{\mathrm{turb}}/\theta^{\mathrm{turb}} := \left\{\partial S^{\mathrm{turb}}/\partial\langle \mathrm{v}\rangle\right\}_{e^{\mathrm{turb}}}.$$

Именно в этом случае интенсивным переменным $\theta^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ и $\mathrm{p}^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ можно приписать смысл соответственно обобщенной температуры и давления подсистемы турбулентного хаоса. Тогда дифференциальная форма фундаментального уравнения Гиббса, записанная вдоль траектории движения центра масс элементарного физического объема, принимает вид

$$\theta^{\mathrm{turb}}\frac{\mathrm{D}S^{\mathrm{turb}}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}e^{\mathrm{turb}}}{\mathrm{D}t} - \mathrm{p}^{\mathrm{turb}}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right). \tag{48}$$

Далее будем отождествлять внутреннюю энергию $e^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ с полной энергией турбулентности электропроводной жидкости $\bar{\rho}e^{\mathrm{turb}} := \bar{\rho}\langle b_{\pounds}\rangle = \overline{\rho|\mathbf{u}''|^2}/2 + \overline{|\mathbf{B}'|^2}/2\mu_0$; тогда $\mathrm{p}^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t) \equiv (\mathbf{R}_{\mathrm{K}} : \mathbf{I}) = \frac{2}{3}\bar{\rho}\langle b_{\Sigma}\rangle$. Соответствующее балансовое уравнение для энтропии турбулизации $S^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ электропроводной среды получим из (48) рассмотренным выше способом, используя для этого уравнение (1) для удельного объема $1/\bar{\rho}$ и уравнение (43) для полной турбулентной энергии $\langle b_{\Sigma}\rangle(\mathbf{x},t)$; в результате получим:

$$\bar{\rho}\frac{\mathrm{D}S^{\mathrm{turb}}}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot\left\{\frac{\mathbf{J}_{\langle b_{\Sigma}\rangle}}{\theta^{\mathrm{turb}}}\right\} = \sigma_{S^{\mathrm{turb}}} \equiv \sigma^{(i)}_{S^{\mathrm{turb}}} + \sigma^{(e)}_{S^{\mathrm{turb}}}, \tag{49}$$

$$0 \le \sigma^{(i)}_{S^{\mathrm{turb}}} = \frac{1}{\theta^{\mathrm{turb}}}\left\{-\mathbf{J}_{\langle b_{\Sigma}\rangle}\cdot\frac{\nabla\theta^{\mathrm{turb}}}{\theta^{\mathrm{turb}}} + \right.$$

$$+\left(\mathbf{R}_K - p^{turb}\,\mathbf{I}\right) : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \mu_0^{-1}\mathbf{R}_M : \left(\nabla\bar{\mathbf{B}} + \Omega\right)\Big\}, \quad (50)$$

$$\sigma^{(e)}_{S^{turb}} := \frac{1}{\theta^{turb}}\left\{\overline{p'\nabla\cdot\mathbf{u}''} - \mathbf{J}^{turb}_{\langle v\rangle}\cdot\nabla\bar{p} - \bar{\rho}\langle\varepsilon_\Sigma\rangle\right\} \equiv$$
$$\equiv -\frac{\Im}{\theta^{turb}}. \quad (51)$$

Здесь $\Omega := 2\Omega_0 + \langle\omega\rangle$; величины $\sigma^{(i)}_{S^{turb}}(\mathbf{x},t)$ и $\sigma^{(e)}_{S^{turb}}(\mathbf{x},t)$ имеют соответственно смысл скоростей локального производства и стока пульсационной энтропии $S^{turb}(\mathbf{x},t)$. Отметим, что отнесение отдельных слагаемых уравнения (49) к турбулентному потоку $\mathbf{J}_{S^{turb}}(\mathbf{x},t) := \mathbf{J}_{\langle b_\Sigma\rangle}/\theta^{turb}$, или к производству $\sigma_{S^{turb}}(\mathbf{x},t)$ энтропии $S^{turb}(\mathbf{x},t)$, вообще говоря, неоднозначно: возможен целый ряд альтернативных формулировок, использующих различные определения величины $\mathbf{J}_{(S^{turb})}(\mathbf{x},t)$.

Балансовое уравнение для суммарной энтропии

Введение в рассмотрение двух энтропий $\langle S\rangle(\mathbf{x},t)$ и $S^{turb}(\mathbf{x},t)$ конкретизирует наше представление о турбулентном континууме как о термодинамическом комплексе, состоящем из двух взаимно открытых подсистем, заполняющих одно и то же координатное пространство непрерывно – подсистемы среднего движения проводящей жидкости и подсистемы турбулентного хаоса. Комбинируя (46) и (49), получим уравнение баланса для суммарной $S_\Sigma(\mathbf{x},t) := \langle S\rangle + S^{turb}$ энтропии системы в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}S_\Sigma) + \nabla\cdot\left\{\bar{\rho}S_\Sigma\langle\mathbf{u}\rangle + \frac{\mathbf{J}_{\langle e\rangle}}{\langle\theta\rangle} + \frac{\mathbf{J}_{b_\Sigma}}{\theta^{turb}}\right\} = \sigma_\Sigma \geq 0, \quad (52)$$

где $\mathbf{J}_{\langle e\rangle}(\mathbf{x},t) := \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}}_{rad} + \tilde{\mathbf{q}}^{turb}$ – поток турбулентной внутренней энергии проводящего вещества; $\sigma_\Sigma(\mathbf{x},t) := \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle}(\mathbf{x},t) + \sigma^{(i)}_{S^{turb}}(\mathbf{x},t) + \Im\dfrac{\theta^{turb} - \langle\theta\rangle}{\theta^{turb}\langle\theta\rangle}$ – производство суммарной энтропии, связанное с необратимыми процессами в турбулентной плазме; $\Im(\mathbf{x},t) := -\overline{p'\nabla\cdot\mathbf{u}''} + \mathbf{J}^{turb}_{\langle v\rangle}\cdot\nabla\bar{p} + \bar{\rho}\langle\varepsilon_\Sigma\rangle$ – поток энергии перехода между подсистемами осредненного движения и турбулентного хаоса.

Положительная величина $\sigma_\Sigma(\mathbf{x},t)$ имеет следующую билинейную структуру:

$$0 \leq \sigma_\Sigma := \Im\frac{\theta^{turb} - \langle\theta\rangle}{\theta^{turb}\langle\theta\rangle} + \frac{1}{\langle\theta\rangle}\Big\{-\mathbf{J}_{\langle e\rangle}\cdot\nabla\ln\langle\theta\rangle +$$
$$+\bar{\tau} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \mu_0^{-1}\nu_M\left(\nabla\times\bar{\mathbf{B}}\right)^2\Big\} +$$
$$+\frac{1}{\theta^{turb}}\Big\{-\mathbf{J}_{\langle b_\Sigma\rangle}\cdot\nabla\ln\theta^{turb} + \left(\mathbf{R}_K - p^{turb}\,\mathbf{I}\right) : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle +$$
$$+\mu_0^{-1}\mathbf{R}_M : \left(\nabla\bar{\mathbf{B}} + \Omega\right)\Big\}. \quad (53)$$

Из (53) видно, что локальное производство $\sigma_\Sigma(\mathbf{x},t)$ суммарной энтропии $S_\Sigma(\mathbf{x},t)$ определяется следующим набором термодинамических потоков:

$$\mathbf{J}_{\langle e\rangle}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{J}_{\langle b_\Sigma\rangle}(\mathbf{x},t),\ \bar{\tau}(\mathbf{x},t),$$
$$\left(\mathbf{R}_K(\mathbf{x},t) - \mathbf{I}\,p^{turb}(\mathbf{x},t)\right),\ \mathbf{R}_M(\mathbf{x},t),\ \Im(\mathbf{x},t) \quad (54)$$

и сопряженных им термодинамических сил

$$\nabla\left(\frac{1}{\langle\theta\rangle}\right),\ \nabla\left(\frac{1}{\theta^{turb}}\right),\ \frac{1}{\langle\theta\rangle}\nabla\langle\mathbf{u}\rangle,\ \frac{1}{\theta^{turb}}\nabla\langle\mathbf{u}\rangle,$$
$$\theta^{turb}\left(\nabla\bar{\mathbf{B}} + \Omega\right),\ \frac{\theta^{turb} - \langle\theta\rangle}{\theta^{turb}\langle\theta\rangle}. \quad (55)$$

Согласно основному постулату неравновесной термодинамики, в том случае, когда термодинамическая система находится вблизи локального равновесия или вблизи устойчивого стационарно-неравновесного состояния, термодинамические потоки могут быть представлены в виде линейных конститутивных соотношений от сопряженных им макроскопических сил (де Гроот, Мазур, 1964) для осредненных молекулярных потоков, так и для турбулентных потоков, фигурирующих в осредненных уравнениях МГД. Следует иметь в виду, что спектр возможных перекрестных эффектов для турбулентного режима течения электропроводной жидкости значительно расширяется по сравнению с ее регулярным режимом течения. Однако в настоящее время, к сожалению, отсутствуют надежные экспериментальные данные, количественно описывающие многие эффекты такого рода. Кроме того, вклад от любых перекрестных эффектов в общую скорость процессов переноса на порядок меньше вклада от прямых эффектов. С учетом этих замечаний будем далее распространять условие положительности производства суммарной энтропии σ_Σ на каждое слагаемое в отдельности, т.е. полагать, что $\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} \geq 0$, $\sigma^{(i)}_{S^{turb}} \geq 0$, $\sigma_{\langle S\rangle, S^{turb}} \geq 0$. Будем также без специальных оговорок опускать ряд перекрестных эффектов в линейных конститутивных соотношениях.

В заключение этого подраздела отметим, что первое слагаемое в правой части выражения (53), описывающее производство энтропии внутри полной системы за счет необратимого обмена энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осредненного движения, в силу второго закона термодинамики всегда положительно

$$\sigma_{\langle S\rangle, S^{turb}}(\mathbf{x},t) = \Im\left(\theta^{turb} - \langle\theta\rangle\right)/\theta^{turb}\langle\theta\rangle \geq 0, \quad (56)$$

и потому “направление” термодинамического потока $\Im(\mathbf{x},t)$ определяется знаком функции состояния $X_{\Im}(\mathbf{x},t) \equiv (1/\langle\theta\rangle - 1/\theta^{\mathrm{turb}})$. Эту функцию следует рассматривать как сопряженную термодинамическую силу, вызывающую именно этот поток энтропии. Известно, что подобного рода обмен энтропией между двумя взаимно открытыми подсистемами является непременным условием возникновения когерентных структур, т.е. может быть источником самоорганизации в одной из них (Дьярмати, 1974).

Стационарно-неравновесный режим подсистемы турбулентного хаоса

Покажем, что диссипативная активность подсистемы турбулентного хаоса в случае стационарно-неравновесного состояния как раз и определяется притоком отрицательной энтропии$(\sigma^{e}_{(S^{\mathrm{turb}})} := -\Im/\theta^{\mathrm{turb}} < 0)$ от подсистемы осредненного движения. С этой целью проанализируем режим развитого турбулентного движения жидкости – режим стационарно-неравновесной турбулентности, когда в подсистеме турбулентного хаоса устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором $\mathrm{D}S^{\mathrm{turb}}/\mathrm{D}t \cong 0$, а поток $\mathbf{J}_{(S^{\mathrm{turb}})}(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{J}_{\langle b_\Sigma\rangle}/\theta^{\mathrm{turb}}$ энтропии турбулизации $S_{turb}(\mathbf{x},t)$ почти постоянен, $\mathbf{J}_{(S^{\mathrm{turb}})} \cong \mathrm{const}$. Последнее условие означает, что производство энтропии турбулизации $\sigma^{i}_{(S^{\mathrm{turb}})}(\mathbf{x},t)$ так компенсируется ее оттоком $\sigma^{e}_{(S^{\mathrm{turb}})}(\mathbf{x},t)$, что генерация $\sigma_{(S^{\mathrm{turb}})} \equiv \sigma^{e}_{(S^{\mathrm{turb}})} + \sigma^{i}_{(S^{\mathrm{turb}})} \cong 0$ энтропии турбулизации $S^{\mathrm{turb}}(\mathbf{x},t)$ почти отсутствует. Так как величина $\sigma^{i}_{(S^{\mathrm{turb}})} \geq 0$, то справедливо приближенное равенство $0 > \sigma^{e}_{(S^{\mathrm{turb}})} \cong -\sigma^{i}_{(S^{\mathrm{turb}})}$. Таким образом, в этом случае турбулентный хаос должен экспортировать энтропию во “внешнюю среду” (т.е. отдавать количество энтропии $\sigma^{e}_{(S^{\mathrm{turb}})}$ осредненному движению), для того чтобы скомпенсировать ее производство (количество $\sigma^{i}_{(S^{\mathrm{turb}})}$) за счет внутренних необратимых процессов. Другими словами, для поддержания квазистационарного состояния в подсистеме турбулентной надструктуры необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от подсистемы осредненного движения, $\sigma^{e}_{(S^{\mathrm{turb}})} := -\Im/\theta^{\mathrm{turb}} = -\langle\theta\rangle\sigma^{e}_{\langle S\rangle}/\theta^{\mathrm{turb}} < 0$. Именно эта, поступающая в подсистему турбулентного хаоса, негэнтропия расходуется на образование в ней разнообразных упорядоченных (диссипативных) структур (см. Пригожин, Стенгерс, 1994).

Действительно, поскольку в стационарно-неравновесном состоянии величина оттока энтропии из подсистемы осредненного движения положительна $0 \leq \sigma^{e}_{\langle S\rangle} = \Im/\langle\theta\rangle$, то скорость обмена энтропией (теплом) между осредненным и пульсационным движениями также положительна, $\Im \geq 0$. Но тогда из неравенства $\sigma_{\langle S\rangle, S^{\mathrm{turb}}} := \Im(\theta^{\mathrm{turb}} - \langle\theta\rangle)/\theta^{\mathrm{turb}}\langle\theta\rangle \geq 0$ следует, что температура турбулизации θ^{turb}выше осредненной температуры $\langle\theta\rangle$, что находится в полном согласии с основным синергетическим принципом о самоорганизации любой диссипативной системы. В соответствии с этим принципом, формирование упорядоченных структур (мелкомасштабных вихревых образований) в подсистеме турбулентного хаоса при отводе тепла из нее, т.е. при переходе к более низким температурам $\langle\theta\rangle$, является универсальным свойством материи (Пригожин, Стенгерс, 1994).

Кроме этого, в рассматриваемом случае верно приближенное равенство $0 \leq \sigma^{e}_{\langle S\rangle} = -\theta^{\mathrm{turb}}\sigma^{e}_{(S^{\mathrm{turb}})}/\langle\theta\rangle \cong \theta^{\mathrm{turb}}\sigma^{i}_{(S^{\mathrm{turb}})}/\langle\theta\rangle$, и уравнение (46) для энтропии $\langle S\rangle(\mathbf{x},t)$ принимает вид

$$\bar{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\langle S\rangle + \nabla\cdot\left\{\bar{\rho}\langle S\rangle\langle\mathbf{u}\rangle + \frac{\mathbf{J}_{\langle e\rangle}}{\langle\theta\rangle}\right\} = \sigma_{\langle S\rangle} = \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} + \sigma^{(e)}_{\langle S\rangle} = \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} + \frac{\theta^{\mathrm{turb}}}{\langle\theta\rangle}\sigma^{i}_{(S^{\mathrm{turb}})}, \tag{57}$$

где для локального рассеяния энергии $\langle\theta\rangle\sigma_{\langle S\rangle}$ справедливо выражение

$$0 \leq \langle\theta\rangle\sigma_{\langle S\rangle} := -\tilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{turb}}\cdot\nabla\ln\langle\theta\rangle + \nu_{\mathrm{M}}\mu_0^{-1}\left(\nabla\times\overline{\mathbf{B}}\right)^2 + \left[\mathbf{R}_{\mathrm{K}} - \mathrm{p}^{\mathrm{turb}}\,\mathbf{I}\right]:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \mu_0^{-1}\mathbf{R}_{\mathrm{M}}:\left(\nabla\overline{\mathbf{B}} + \Omega\right). \tag{58}$$

Выражение (58) содержит потоки и термодинамические силы первой и второй тензорных размерностей. Если разложить тензор второго ранга $\nabla\langle\mathbf{u}\rangle = \nabla^{s}\langle\mathbf{u}\rangle + \nabla^{a}\langle\mathbf{u}\rangle$ на симметричную $\nabla^{s}\langle\mathbf{u}\rangle$ (тензор скорости деформации) и антисимметричную части $2\nabla^{a}\langle\mathbf{u}\rangle = \nabla\times\langle\mathbf{u}\rangle \equiv \langle\acute{\mathbf{E}}\rangle$, то предпоследнее слагаемое в (58) может быть переписано в виде

$$\left[\mathbf{R}_{\mathrm{K}} - \mathrm{p}^{\mathrm{turb}}\,\mathbf{I}\right]:\nabla\langle\mathbf{u}\rangle \equiv \overset{0}{\mathbf{R}}_{\mathrm{K}} : \overset{0}{\mathbf{D}}, \tag{59}$$

где

$$\overset{0}{\mathbf{R}}_{\mathrm{K}} \equiv \overset{0}{\mathbf{R}} + \overset{0}{\ddot{\mathbf{A}}}{}^{\mathrm{turb}}_{\mathrm{M}}, \quad \overset{0}{\mathbf{D}} := \mathbf{D} - \tfrac{1}{3}\left\{\mathbf{I}:\left(\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle\right)\right\}\mathbf{I},$$

$$\overset{0}{\mathbf{R}} := \mathbf{R} - \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{R}:\mathbf{I}\right)\mathbf{I} = \mathbf{R} - \tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle b\rangle\mathbf{I},$$

$$\overset{0}{\tau}{}^{\mathrm{turb}}_{\mathrm{M}} := \tau^{\mathrm{turb}}_{\mathrm{M}} - \tfrac{1}{3}\left(\tau^{\mathrm{turb}}_{\mathrm{M}}:\mathbf{I}\right)\mathbf{I} = \tau^{\mathrm{turb}}_{\mathrm{M}} + \tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle b_{\mathrm{M}}\rangle\mathbf{I} \tag{60}$$

– симметричные тензоры турбулентных напряжений Рейнольдса $\mathbf{R}$ и магнитных натяжений $\tau^{\mathrm{turb}}_{\mathrm{M}}$. Аналогично последнее слагаемое в (58) может быть переписано в виде

$$\mu_0^{-1}\mathbf{R}_{\rm M} : \nabla\bar{\mathbf{B}} = \mu_0^{-1}\mathbf{R}_{\rm M} : \left\{\nabla^s\bar{\mathbf{B}} + \nabla^a\bar{\mathbf{B}}\right\} = -\mathcal{G}_{\rm M}\cdot\bar{\mathbf{j}}. \quad (61)$$

Исходя из выражения (58), при использовании принципа Кюри–Пригожина (согласно которому связь между тензорами различного ранга в изотропной среде невозможна (де Гроот, Мазур, 1964)), можно получить (в пренебрежении перекрестными эффектами) следующие определяющие соотношения для турбулентных гидромагнитных потоков:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{\rm turb}(\mathbf{x},t) = -\lambda^{\rm turb}\frac{\langle\theta\rangle}{c_{\rm p}}\nabla\langle {\rm S}\rangle \cong -\lambda^{\rm turb}\left(\nabla\langle\theta\rangle - \frac{\mathbf{g}}{c_{\rm p}}\right), \quad (62)$$

$$\mathbf{R}_{\rm K}(\mathbf{x},t) = -\tfrac{2}{3}\bar{\rho}K_{\rm R}\,\mathbf{I} + \bar{\rho}\nu_{\rm K}^{\rm turb}\left\{2\nabla^s\langle\mathbf{u}\rangle - \tfrac{2}{3}\mathbf{I}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle\right\} + $$
$$+ 2\nu_{\rm K,M}^{\rm turb}\nabla^s\bar{\mathbf{B}} +$$
$$-\eta^{\rm turb}\left\{\Omega\nabla H + (\nabla H)\Omega - \frac{2}{3}(\Omega\cdot\nabla H)\mathbf{I}\right\}, \quad (63)$$

$$\mathbf{R}_{\rm M}(\mathbf{x},t) = 2\nu_{\rm M}^{\rm turb}\nabla^a\bar{\mathbf{B}} - 2\nu_{\rm M,K}^{\rm turb}\left(\nabla^a\langle\mathbf{u}\rangle + \Omega_0\right) \equiv$$
$$\equiv \nu_{\rm M}^{\rm turb}\nabla\times\bar{\mathbf{B}} - \nu_{\rm M,K}^{\rm turb}\Omega, \quad (64)$$

где $K_{\rm R}(\mathbf{x},t) := \langle b\rangle - \langle b_{\rm M}\rangle$ – так называемая остаточная энергия турбулентности (Pouquet и др., 1976); $\lambda^{\rm turb}$, $\nu_{\rm K}^{\rm turb}$, $\nu_{\rm M}^{\rm turb}$, $\nu_{\rm M,K}^{\rm turb}$, $\eta^{\rm turb}$ – соответственно модельные коэффициенты переноса (в общем случае тензоры 2-го или 4-го рангов) турбулентной теплопроводности, турбулентной кинематической и турбулентной вязкости и турбулентной диффузии магнитного поля, зависящие в общем случае от статистических характеристик спиральной турбулентности $K_{\rm R}(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$, $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ и $H(\mathbf{x},t)$.

Определяющее соотношение для вектора радиации, записанное в форме лучистого потока тепла, принимает вид

$$\mathbf{q}_{\rm rad}(\mathbf{x},t) = -\chi_{\rm rad}\nabla\langle\theta\rangle = -\frac{16\sigma_{\rm B}\langle\theta\rangle^3}{3\kappa\bar{\rho}}\nabla\langle\theta\rangle =$$
$$= -\frac{4\sigma_{\rm B}}{3\kappa\bar{\rho}}\nabla\langle\theta\rangle^4, \quad (65)$$

справедливый в случае равновесного излучения (например, при локальном термодинамическом равновесии излучения с веществом внутри оптически толстых дисков). Здесь σ_B, $\chi_{rad} = 16\sigma_B\langle\theta\rangle^3/3\kappa\bar{\rho}$ – соответственно постоянная Стефана–Больцмана и коэффициент лучистой (нелинейной) теплопроводности среды, сильно зависящий от температуры и плотности вещества; $\kappa(\rho,\theta)$ – полная непрозрачность среды, которая сложным образом зависит от параметров состояния ρ и θ, а также от степени ионизации и химического состав (см., например, Франк-Каменецкий, 1959; Фридман, Бисикало, 2010) и т.п. В общем случае величина κ определяется как росселандово среднее по обратным величинам $1/\kappa_\nu$ спектральной непрозрачности. Как известно, доминирующий вклад κ_{ff} в непрозрачность κ в аккреционном диске вносит нерелятивистское тепловое тормозное излучение, или “свободно-свободные переходы”. Связанная с этими процессами поглощения средняя по Росселанду непрозрачность κ определяется формулой Крамерса $\kappa_{ff}(\rho,\theta) = {\rm K}\rho\theta^{-7/2}$ см^2 г$^{-1}$, где ${\rm K} = 0.32\times10^{23}$ – константа. В оптически толстых дисках сравнимую (но все же меньшую) величину $\kappa_{\rm es} = 2\times10^{-2}(1+X)$ см^2 г$^{-1}$ вносят “связанно-связанные” переходы в линиях и “связанно-свободные” ионизационные переходы (здесь X – массовая доля водорода в дисковой среде).

Замыкающее соотношение для турбулентной электродвижущей силы

Из соотношений (17) и (64) вытекает следующее выражение для турбулентной электродвижущей силы

$${\rm G}_{\rm M}(\mathbf{x},t) = -\nu_{\rm M}^{\rm turb}\mu_0^{-1}\nabla\times\bar{\mathbf{B}} + \nu_{\rm M.K}^{\rm turb}\nabla\times\Omega. \quad (66)$$

Коэффициенты $\nu_{\rm M}^{\rm turb}$ и $\nu_{\rm M,K}^{\rm turb}$, определяемые пульсационными полями $\mathbf{u}''$ и $\mathbf{B}'$, часто можно считать постоянными величинами. Поскольку вектор $\bar{\mathbf{B}}$ является псевдовектором (т.е. он изменяет знак при инверсии пространственных координат), а вектор $\mathcal{G}_{\rm M}$ представляет собой истинный (полярный) вектор и должен быть образован из различных истинных векторов, то магнитный коэффициент турбулентной вязкости (диффузии) $\nu_{\rm M}^{\rm turb}$ должен являться скаляром, в то время как коэффициент $\nu_{\rm M,K}^{\rm turb}$ является псевдоскаляром. Часто слагаемое с коэффициентом $\nu_{\rm M,K}^{\rm turb}$, описывающее перекрестный эффект, может быть опущено (Coroniti, 1981). Тогда соотношение (66) принимает более простой вид: $\mathcal{G}_{\rm M} = -\nu_{\rm M}^{\rm turb}\nabla\times\bar{\mathbf{B}}$. Подстановка этого выражения в уравнение (14) приводит к следующему уравнению индукции для средних полей:

$$\bar{\rho}\frac{\rm D}{{\rm D}t}\left(\bar{\mathbf{B}}/\bar{\rho}\right) = \bar{\mathbf{B}} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \left(\nu_{\rm M} + \nu_{\rm M}^{\rm turb}\right)\nabla^2\bar{\mathbf{B}}, \quad (67)$$

из которого следует, что суммарное влияние турбулентной ЭДС $\mathcal{G}_{\rm M}$ сводится в этом случае просто к изменению величины эффективного коэффициента диффузии магнитного поля, т.е.

$\nu_M \to \nu_M + \nu_M^{turb}$. Если коэффициент ν_M^{turb}является положительной величиной, то случайное перемешивание турбулентной плазмы (создаваемое пульсациями полей $\mathbf{u}''$и $\mathbf{B}'$) не ослабляет, а усиливает диффузионный процесс.

Сделаем теперь чрезвычайно важное замечание по поводу вывода формулы (66) для ЭДС, описываемой вектором $\mathcal{G}_M$. Этот вывод справедлив только для изотропной (в гидродинамическом смысле) однородной турбулентности, когда поле пульсирующих скоростей $\mathbf{u}''$ обладает зеркальной симметрией во всей плазменной среде. В частности, этим свойством обладает турбулентность, возбуждаемая решеткой в однородном течении на некотором расстоянии от решетки. Поскольку неизвестны условия, при которых подобная турбулентность не зеркально симметрична, то этот случай является чисто академическим. Тем не менее его часто принимают во внимание, поскольку он представляет определенный интерес в динамо-теории.

Вместе с тем для реального вращающегося аккреционного диска (или Солнца) часто реализуется ситуация, при которой, например, в верхней части аккреционного диска (или в северном полушарии Солнца) левовинтовые спиральные движения более вероятны, чем правовинтовые, или наоборот. Физическая причина нарушения отражательной симметрии может быть обусловлена также векторным гравитационным полем $\mathbf{g}$, которое может быть полем градиента интенсивности турбулентности или полем градиента плотности. Вектор электродвижущей силы $\mathcal{G}_M$, записанный в этом случае в виде (см. Краузе, Рэдлер, 1984)

$$\mathcal{G}_M = -\nu_M^{turb}\nabla \times \overline{\mathbf{B}} - \nu_G^{turb}\mathbf{g} \times \overline{\mathbf{B}},$$

перпендикулярен к полям $\mathbf{g}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ и может быть интерпретирован как эффект накачки.

Для турбулентности, находящейся под воздействием силы Кориолиса, турбулентные вихри могут всплывать и опускаться в дисковой среде. При этом зеркальная симметрия пульсационного поля $\mathbf{u}''$ относительно центральной плоскости диска в общем случае отсутствует, поскольку турбулентность может обладать так называемой гидродинамической спиральностью $H_K := \langle \mathbf{u}'' \cdot \acute{\mathbf{E}}'' \rangle$, характеризующей избыток вихрей определенного знака (см. Moffatt, 1980; Краузе, Рэдлер, 1984). Обобщение формулы (66) на случай отражательно-несимметричной турбулентности принимает следующий вид: (см. Steenbeck и др., 1966)

$$\mathrm{G}_M(\mathbf{x},t) = \alpha\,\overline{\mathbf{B}} - \nu_M^{turb}\nabla \times \overline{\mathbf{B}} + \nu_{M,K}^{turb}\boldsymbol{\Omega} \equiv \alpha\,\overline{\mathbf{B}} - \beta\overline{\mathbf{j}} + \gamma\boldsymbol{\Omega}, \tag{68}$$

где $\Omega := \left(2\Omega_0 + \langle\omega\rangle\right)$; $\gamma = \frac{5}{7}\nu_{K,M}^{turb}$, $\beta = \frac{5}{7}\nu_M^{turb}$. Коэффициент спиральности $\alpha(\mathbf{x},t)$ является псевдоскаляром, и потому альфа-эффект антисимметричен относительно центральной плоскости диска. Свойства симметрии уравнений Максвелла допускают при этом два вида симметрии для собственных решений (мод) уравнения динамо среднего поля (см. (70)): магнитные поля могут быть антисимметричными относительно экватора (дипольная симметрия) и симметричны относительно экватора (квадрупольная симметрия). В частности, механизм солнечного динамо возбуждает, как правило, преимущественно дипольную осциллирующую моду (так называемое правило Хейла). Простые рассуждения показывают, что для случая изотропного и зеркально симметричного поля скоростей $\mathbf{u}''(\mathbf{x},t)$ коэффициент спиральности α равен нулю. Действительно, для изотропной среды одинакова вероятность как некоторой данной реализации ансамбля этого поля, так и реализации, полученной из нее зеркальным отражением. Тогда, с одной стороны, коэффициент $\alpha(\mathbf{x},t)$ не должен изменяться, если выполнить преобразование отражения, так как сам ансамбль не изменился, но, с другой стороны, коэффициент α должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром; отсюда следует, что $\alpha = 0$.

Подставляя выражение (68) в закон Ома (5) и в уравнение индукции (14) для средних полей, получим:

$$\overline{\mathbf{j}} = \sigma_e^{turb}\left(\overline{\mathbf{E}} + \langle\mathbf{u}\rangle \times \overline{\mathbf{B}} + \alpha\,\overline{\mathbf{B}} + \gamma\boldsymbol{\Omega}\right), \tag{69}$$

$$\overline{\rho}\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\overline{\mathbf{B}}}{\overline{\rho}}\right) \cong \left(\overline{\mathbf{B}} \cdot \nabla\right)\langle\mathbf{u}\rangle + \mu_0\alpha\overline{\mathbf{j}} + (\nu_M + \nu_M^{turb})\nabla^2\overline{\mathbf{B}} - \gamma\nabla^2\langle\mathbf{u}\rangle, \tag{70}$$

где

$$\sigma_e^{turb} = \frac{\sigma_e}{1 + \mu_0\nu_M^{turb}\sigma_e} = \frac{\sigma_e\nu_M}{\nu_M + \nu_M^{turb}} \cong \frac{\sigma_e\nu_M}{\nu_M^{turb}} = \frac{1}{\mu_0\nu_M^{turb}} \tag{71}$$

– турбулентная проводимость σ_e^{turb}, которая в случае развитой турбулентности меньше молекулярной проводимости σ_e.

В уравнении (70) член с коэффициентом ν_M^{turb} отражает увеличение магнитной диффузии (или турбулентного удельного сопротивления проводящей плазмы) за счет турбулентных флуктуаций. Физический смысл коэффициента $\alpha(\mathbf{x},t)$ можно пояснить с помощью уравнения (69), которое отражает возникновение осредненного тока проводимости $\overline{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$, направленного параллельно или антипараллельно вектору $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x},t)$ в зависимости от знака $\alpha(\mathbf{x},t)$ (Краузе, Рэдлер, 1984). Это резко противоречит ламинарному случаю, когда величина $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ порождает ток проводимости $\mathbf{j}$ перпендикулярно вектору $\mathbf{B}$. Механизм, связанный с коэффициентом α, обычно называют альфа-эффектом или турбулентным динамо. Коэффициент $\alpha(\mathbf{x},t)$ в статистической теории выражается в терминах двух типов спиральных характеристик турбулентности, а именно в виде разности магнитной спиральности $H_\mathrm{M} := \langle \rho_0{}^{-1}\mathbf{B}' \cdot \mathbf{j}' \rangle$ и гидродинамической спиральности $H_\mathrm{K} := \langle \boldsymbol{\omega}'' \cdot \mathbf{u}'' \rangle$; $\alpha \sim H_\mathrm{M} - H_\mathrm{K}$ (см. Yoshizawa, 1990).

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СПИРАЛЬНОСТЕЙ K, W И H. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА

Для замыкания системы уравнений (62)–(64) и (68), необходимо иметь выражения для коэффициентов переноса в терминах среднего поля и объемных величин, характеризующих спиральное гидромагнитное состояние турбулентного поля. К сожалению, термодинамический подход не позволяет получить явные выражения для коэффициентов ламинарного и турбулентного переноса. Для их определения, как правило, привлекается статистическая теория динамики турбулентности, которая позволяет строить модели на более прочной основе, чем это возможно при использовании эвристических методов (см., например, Краузе, Рэдлер, 1984; Yoshizawa и др., 2004). В частности, статистический подход приводит к следующим выражениям для коэффициентов $\alpha(\mathbf{x},t)$, $\beta(\mathbf{x},t)$ и $\gamma(\mathbf{x},t)$ (Yokoi, 2006):

$$\alpha = C_\alpha K H \,/\, \varepsilon,\ \beta = C_\beta K^2/\varepsilon\ ,$$
$$\gamma = C_\gamma K\, W \,/\, \varepsilon,\ \eta = C_\eta K^2/\varepsilon\ . \tag{72}$$

Здесь
$C_\alpha \cong 0.02$, $C_\beta \cong 0.055$, $C_\gamma \cong 0.039$;

$$K(\mathbf{x},t) := \tfrac{1}{2}\left(\langle|\mathbf{u}''|^2\rangle + \langle|\mathbf{B}'|^2\rangle \,/\, \rho_0\mu_0\right) \tag{73}$$

– полная турбулентная энергия сжимаемой плазмы (скалярная величина);

$$W(\mathbf{x},t) := \langle \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{B}' \rangle \tag{74}$$

– турбулентная поперечная (кросс) спиральность (псевдоскалярная величина);

$$H(\mathbf{x},t) := \left[\rho_0{}^{-1}\langle \mathbf{B}' \cdot \mathbf{j}' \rangle - \langle \mathbf{u}'' \cdot \boldsymbol{\omega}'' \rangle\right] \tag{75}$$

– турбулентная остаточная спиральность (псевдоскалярная величина);

$$\varepsilon_\Sigma(\mathbf{x},t) := \overline{\ddot{\mathbf{A}} \colon \nabla\mathbf{u}''} / \,\overline{\rho} + \overline{|\mathbf{j}'|^2} / \,\overline{\rho}\sigma_e \simeq \overline{\ddot{\mathbf{A}} \colon \nabla\mathbf{u}''} / \,\overline{\rho} \tag{76}$$

– полная удельная скорость диссипации турбулентной кинетической энергии и магнитной энергии тепло.

Для того чтобы замкнуть вышеприведенные выражения для транспортных коэффициентов, необходимы эволюционные уравнения для объемных статистических величин $K(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$, $H(\mathbf{x},t)$ и $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ (см., например, Yoshizawa, 1998; Yokoi, 1999). В силу чрезвычайной громоздкости этих уравнений для сильно сжимаемой среды ограничимся далее случаем слабой сжимаемости $\rho \sim \rho_0$. Заметим при этом, что в сжимаемом потоке, если сжимаемость не так сильна, как в случае сдвиговых течений, турбулентность часто можно рассматривать как слабо сжимаемую. При этом именно стратификация средней плотности ρ_0 является фундаментальной характеристикой, влияющей на турбулентность.

Дифференциальные уравнения для пульсаций в случае $\rho \sim \rho_0$

Пульсации скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ и магнитного поля $\mathbf{B}'(\mathbf{x},t)$ в рассматриваемом случае описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}\mathbf{u}'}{\mathrm{D}t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}'\mathbf{u}' - (\rho_0\mu_0)^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{B}' + \mathbf{R}_K\right) = \\ = -\rho_0^{-1}\nabla p'_\mathrm{M} - 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u}' - \mathbf{u}' \cdot \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \\ + (\rho_0\mu_0)^{-1}\left(\overline{\mathbf{B}} \cdot \nabla\mathbf{B}' + \mathbf{B}' \cdot \nabla\overline{\mathbf{B}}\right) + \nu\Delta\mathbf{u}'\ , \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}\mathbf{B}'}{\mathrm{D}t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}'\mathbf{B}' - \mathbf{B}'\mathbf{u}'\right) = \\ = \nabla \times \mathcal{G}_\mathrm{M} - \mathbf{u}' \cdot \nabla\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{B}} \cdot \nabla\mathbf{u}' + \\ + \mathbf{B}' \cdot \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \lambda_\mathrm{M}\Delta\mathbf{B}'. \end{aligned} \tag{78}$$

Для дальнейших целей нам понадобятся также аналогичные уравнения для пульсаций завихренности $\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{x},t)$ $(= \nabla \times \mathbf{u}')$ и пульсаций плотности электрического тока $\mathbf{j}'(\mathbf{x},t)$. Первое уравнение, которое легко может быть получено из уравнения (15), имеет вид:

$$\frac{\mathrm{D}\omega'}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot\left(\mathbf{u}'\omega' - \omega'\mathbf{u}' - \rho_0^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{j}' + \rho_0^{-1}\mathbf{j}'\mathbf{B}'\right) + \\ + \nabla\times\mathbf{R}_K - \nu\Delta\omega' + \mathbf{u}'\cdot\nabla\langle\omega\rangle = \\ = \langle\omega\rangle\cdot\nabla\mathbf{u}' + \omega'\cdot\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \\ + \rho_0^{-1}\left\{\overline{\mathbf{B}}\cdot\nabla\mathbf{j}' + \mathbf{B}'\cdot\nabla\overline{\mathbf{j}} - \overline{\mathbf{j}}\cdot\nabla\mathbf{B}' - \mathbf{j}'\cdot\nabla\overline{\mathbf{B}}\right\}. \quad (79)$$

Второе уравнение для $\mathbf{j}'(\mathbf{x},t)$ имеет в общем случае более сложную структуру

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{j}'}{\mathrm{D}t} + \nabla\cdot\left(\mathbf{u}'\mathbf{j}' - \mu_0^{-1}\mathbf{B}'\omega'\right) \cong \\ = \mathbf{u}'\cdot\nabla\overline{\mathbf{j}} + \mu_0^{-1}\overline{\mathbf{B}}\cdot\nabla\omega' + \\ + \mathbf{B}'\cdot\nabla\langle\omega\rangle + \lambda_\mathrm{M}\nabla\mathbf{j}' + R_C, \quad (80)$$

где величина R_C состоит из слагаемых третьего порядка малости по пульсациям, которой нет в уравнениях (77), (78). Это обстоятельство связано, в конечном счете, с отсутствием закона сохранения для плотности электрического тока $\mathbf{j}'$, в отличие от величин $\mathbf{u}'$, $\mathbf{B}'$ и ω', для которых в случае нулевых значений коэффициентов переноса ν и λ_M имеют место законы сохранения для суммарной гидромагнитной энергии $\int\frac{1}{2}\left\langle\mathbf{u}'^2 + (\rho_0\mu_0)^{-1}\mathbf{B}'^2\right\rangle\mathrm{d}V$, поперечной спиральности $\int\langle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{B}'\rangle\mathrm{d}V$ и кинетической спиральности $\int\langle\mathbf{u}'\cdot\omega'\rangle\mathrm{d}V$.

Феноменологические уравнения для дескрипторов в слабо сжимаемой турбулентности

Используя дифференциальные уравнения (77)–(80) для пульсаций $\mathbf{u}', \mathbf{B}', \dot{\mathbf{E}}'$ и $\mathbf{j}'$, можно получить следующие дифференциальные уравнения для дескрипторов $K(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$ и $H(\mathbf{x},t)$ (Yokoi, 1999; Yoshizawa, 1998):

$$\frac{\mathrm{D}K}{\mathrm{D}t} = \mathbf{R}_K : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \frac{1}{\sqrt{\rho_0\mu_0}}\left(\mathbf{R}_\mathrm{M} : \nabla\overline{\mathbf{B}} + \\ + \overline{\mathbf{B}}\cdot\nabla W\right) - \varepsilon_K + \\ + \nabla\cdot\left\langle\left[-\left(\frac{\mathbf{u}'^2}{2} + \frac{\mathbf{B}'^2}{2\rho_0\mu_0}\right) - p'_\mathrm{M}\right]\mathbf{u}' + \\ + \frac{(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{B}')\mathbf{B}'}{\rho_0\mu_0} + \nu\nabla\left(\frac{\mathbf{u}'^2}{2}\right) + \lambda_\mathrm{M}\nabla\left(\frac{\mathbf{B}'^2}{2\rho_0\mu_0}\right)\right\rangle, \quad (81)$$

$$\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\mu_0}}\left(\mathbf{R}_K : \nabla\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{B}}\cdot\nabla K\right) - \\ - \left(\langle\omega\rangle + 2\Omega_0\right)\cdot\mathrm{G}_\mathrm{M} - \varepsilon_W + \\ + \frac{1}{\sqrt{\rho_0\mu_0}}\nabla\cdot\left\{\left\langle-(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{B}')\mathbf{u}' + \left(\frac{\mathbf{u}'^2}{2} + \frac{\mathbf{B}'^2}{2\rho_0\mu_0} - p'_\mathrm{M}\right)\mathbf{B}'\right\rangle + \\ + \nu\overline{\mathbf{B}}\cdot\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \lambda_\mathrm{M}\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla\overline{\mathbf{B}}\right\}, \quad (82)$$

$$\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t} = \left\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}' + \frac{\mathbf{B}'\mathbf{B}'}{\rho_0\mu_0}\right\rangle : \nabla\langle\omega\rangle + \\ + \frac{1}{\rho_0}\left(\langle\mathbf{B}'\mathbf{j}'\rangle : \langle\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{u}'\mathbf{B}' + \mathbf{B}'\mathbf{u}'\rangle : \overline{\mathbf{j}}\right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\rho_0/\mu_0}}\left\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}' + \frac{\mathbf{B}'\mathbf{B}'}{\rho_0\mu_0}\right\rangle : \nabla\langle\mathbf{j}\rangle - \\ - \frac{1}{\rho_0\mu_0}\langle\omega'\mathbf{B}'\rangle : \nabla\langle\mathbf{B}\rangle + \\ + \frac{1}{\rho_0}\left\langle\mathbf{j}'\cdot\nabla\mathbf{u}' - \mathbf{u}'\cdot\nabla\mathbf{j}'\right\rangle\cdot\overline{\mathbf{B}} - \frac{1}{\rho_0\mu_0}\left\langle\omega'\cdot\nabla\mathbf{B}' - \\ - \mathbf{B}'\cdot\nabla\omega'\right\rangle\cdot\overline{\mathbf{B}} - \frac{\mu_0}{\rho_0}\langle\mathbf{u}'\times\mathbf{j}'\rangle\cdot\overline{\mathbf{j}} + \\ + \langle\mathbf{u}'\times\omega'\rangle\cdot\left(\langle\omega\rangle + 2\Omega_0\right) - \\ - \nabla\cdot\left(\frac{\langle\mathbf{u}'^2\rangle}{2}\left(\langle\omega\rangle + 2\Omega_0\right)\right) + R, \quad (83)$$

где R обозначает оставшуюся часть, которая не зависит явно от среднего поля и состоит из корреляционных функций третьего порядка для пульсаций $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{B}'(\mathbf{x},t)$, $\omega'(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{j}'(\mathbf{x},t)$. Эта сложная форма резко контрастирует со случаем для турбулентной кинетической спиральности в электрически непроводящих турбулентных потоках. Этот факт является большим препятствием для построения самосогласованной модели динамо, применимой к различным типам астро- и геофизических явлений. Именно по этой причине в теории среднего поля с учетом альфа-эффекта турбулентной остаточной спиральности в настоящее время уделяется мало внимания. Это связано, в частности, с тем, что альфа-коэффициент часто принимается за внешний параметр задачи и потому его самосогласованное определение не представляет интереса. Другая причина заключается в том, что основное внимание уделяется только кинетической части $\langle\omega'\cdot\mathbf{u}'\rangle$ величины $H(\mathbf{x},t)$, для которой имеется уравнение с твердой математической основой.

Результат феноменологического моделирования отдельных членов уравнений (81)–(83) приводит к следующим уравнениям для $K(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$ и $H(\mathbf{x},t)$ (сравни с Yokoi, Yoshizawa, 1993; Yoshizawa, 1998; 2002; Yoshizawa и др., 2004; Yokoi, 2011; 2013):

$$\frac{\mathrm{D}K}{\mathrm{D}t} \overset{\text{model}}{=} \nabla\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_0\mu_0}}W\overline{\mathbf{B}} + \frac{\nu_\mathrm{M}^\mathrm{turb}}{\sigma_K}\nabla K\right) - \\ - \frac{1}{\sqrt{\rho_0/\mu_0}}\mathcal{G}_\mathrm{M}\cdot\overline{\mathbf{j}} - \mathbf{R}_\mathrm{K} : \nabla\langle\mathbf{u}\rangle - \varepsilon, \quad (84)$$

$$\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} \overset{\text{model}}{=} \nabla \cdot \left\{ \frac{K\bar{\mathbf{B}}}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}} - \nu_{\mathrm{M}} \left(\frac{\nabla K}{\sigma_{\mathrm{K}}} + \frac{\nabla W}{\sigma_W} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\mathbf{R}_{\mathrm{K}} : \nabla \bar{\mathbf{B}}}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}} - \mathrm{G}_{\mathrm{M}} \cdot \Omega - C_W \frac{\varepsilon}{K} W, \qquad (85)$$

$$\frac{\mathrm{D}H}{\mathrm{D}t} \overset{\text{model}}{=} \nabla \left\{ -\frac{1}{2}(K + K_R)\langle\omega\rangle + \frac{\nu_k}{\sigma_H}\nabla H \right\} +$$

$$+ C_{HR}\frac{K}{\varepsilon}K_R\left\{\frac{1}{\rho_0}\left(\nabla\bar{\mathbf{B}} + \nabla^T\bar{\mathbf{B}}\right) : \nabla\bar{\mathbf{j}} -\right.$$

$$\left. -\left(\nabla\langle\mathbf{u}\rangle + \nabla^T\langle\mathbf{u}\rangle\right) : \nabla\langle\omega\rangle \right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{R}_K \cdot \Omega - C_{HB}\frac{\varepsilon^2}{K^3\sqrt{\rho_0\mu_0}}\mathrm{G}_{\mathrm{M}} \cdot \bar{\mathbf{B}} - C_H\frac{K}{\varepsilon}H. \qquad (86)$$

Здесь $\sigma_K, \sigma_W, \sigma_H, C_W, C_H, C_{HR}, C_{HB}$ – модельные константы, которые пока плохо определены.

Модельные уравнения для скоростей диссипации $\varepsilon_K(\mathbf{x},t)$ и $\varepsilon_W(\mathbf{x},t)$

Величина диссипации $\varepsilon(\mathbf{x},t) = \varepsilon_K(\mathbf{x},t) = \nu\left\langle(\nabla\mathbf{u}')^2\right\rangle + \lambda_{\mathrm{M}}\left\langle(\nabla\mathbf{B}')^2\right\rangle$ подчиняется уравнению с довольно сложной математической структурой, поскольку она не связана с законом сохранения, в отличие от спиральных характеристик турбулентного течения $K(\mathbf{x},t)$ и $W(\mathbf{x},t)$. В связи с этим в качестве модельного уравнения для $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ в научной литературе рекомендовано использовать феноменологическое уравнение (см., например, Yoshizawa, Yokoi, 1993)

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + (\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla)\varepsilon = \nabla\left(\frac{\nu_k}{\sigma_\varepsilon}\nabla\varepsilon\right) -$$

$$- C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{K}\left(\mathbf{R}_{\mathrm{K}} : \langle\mathbf{u}\rangle + \mathcal{G}_{\mathrm{M}} \cdot \bar{\mathbf{j}}\right) - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{K}, \qquad (87)$$

поскольку его тестирование для различных гео- и астрофизических турбулентных МГД-потоков показало, что оно является вполне приемлемой моделью. Здесь $C_{\varepsilon 1} = 1.4$, $C_{\varepsilon 2} = 1.9$, $\sigma_\varepsilon = 1.6$. Следует, однако, заметить, что моделирование уравнения для диссипации $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ до сих пор остается важной проблемой при моделировании гидромагнитной турбулентности.

В качестве модельного уравнения для $\varepsilon_W(\mathbf{x},t) := (\nu + \lambda_{\mathrm{M}})\left\langle\nabla\mathbf{u}' : \nabla\mathbf{B}'\right\rangle$ в научной литературе рекомендовано использовать следующее феноменологическое уравнение (Yokoi, 2011):

$$\frac{\partial\varepsilon_W}{\partial t} + (\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla)\varepsilon_W = \nabla\left(\frac{\nu_k}{\sigma_{\varepsilon_W}}\nabla\varepsilon_W\right) -$$

$$- C_{\varepsilon_W 1}\frac{\varepsilon_W}{K}\left(\mathbf{R}_K : \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{G}_{\mathrm{M}} \cdot \Omega\right) - C_{\varepsilon_W 2}\frac{\varepsilon}{K}\varepsilon_W, \qquad (88)$$

где $C_{\varepsilon_W 1} = 1.4$, $C_{\varepsilon_W 2} = 1.4$, $\sigma_{\varepsilon_W} = 1.0$.

Важно также отметить, что модельные уравнения для несжимаемой плазмы, аналогичные уравнениям (84)–(88), объединенные с соответствующими уравнениями для средних полей скорости $\langle\mathbf{u}\rangle$ и магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}$, успешно применялись для анализа различных тороидальных магнитных полей как в динамике плазмы с управляемым термоядерным синтезом в токамаках (Yoshizawa и др., 1999b), так и в астрофизическом контексте, например, в аккреционных дисках при учете эффекта поперечной спиральности (между состояниями с полоидальным вращением плазмы и без него), который генерирует перпендикулярное диску тороидальное магнитное поле, позволяющее, в частности, газу выходить из диска в виде биполярных струй (Yoshizawa, Yokoi, 1993). При этом скорость струй в протопланетных системах была оценена с помощью численного моделирования (см. Hamba, 1992; Yokoi, 1996).

Эволюционное уравнение для остаточной энергии турбулентности $K_{\mathrm{R}}(\mathbf{x},t)$

Турбулентная остаточная энергия $K_{\mathrm{R}}(\mathbf{x},t) := \frac{1}{2}\langle\mathbf{u}'^2 - \mathbf{B}'^2/\rho_0\mu_0\rangle$ также является одной из фундаментальных величин в системе осредненных уравнений МГД. Она входит в замыкающее соотношение (6) для кинетического тензора Рейнольдса $\mathbf{R}_K(\mathbf{x},t)$ для плазмы, а также является одной из основных корреляций, которую необходимо учитывать при моделировании гидромагнитной турбулентности, поскольку плазменные явления обнаруживают, как правило, значительное различие между кинетической и магнитной энергиями.

Дифференциальная форма эволюционного уравнения для корреляции $K_{\mathrm{R}}(\mathbf{x},t)$,которая легко может быть получена при использовании балансового уравнения для турбулентной энергии вещества плазмы $K_{\mathrm{u}}(\mathbf{x},t) := \langle|\mathbf{u}'|^2\rangle / 2\rho_0$ и уравнения для турбулентной магнитной энергии $K_{\mathrm{B}}(\mathbf{x},t) := \langle|\mathbf{B}'|^2\rangle / 2\mu_0\rho_0$, имеет следующий модельный вид (Yokoi, 2006):

$$\frac{\partial K_{\mathrm{R}}}{\partial t} + (\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\nabla)K_{\mathrm{R}} \overset{\text{model}}{=} \nabla\left(\frac{\nu_{\mathrm{K}}}{\sigma_{\mathrm{R}}}\nabla K_{\mathrm{R}}\right) +$$

$$+ 4\nu_K\left[\left(\nabla^s\langle\mathbf{u}\rangle\right)^2 - \left(\nabla^s\bar{\mathbf{B}}\right)^2\right]\frac{K_{\mathrm{R}}^2}{\varepsilon} -$$

$$- \left(\frac{\varepsilon}{K} + C_{\mathrm{R}}\frac{\varepsilon}{K^2}\bar{\mathbf{B}}^2\right)K_{\mathrm{R}}, \qquad (89)$$

где $C_R \simeq 0.01$, $\sigma_R \simeq 1$. Эволюция корреляционной величины $K_R(\mathbf{x},t)$ должна определяться одновременно с динамикой турбулентной гидромагнитной энергии $K(\mathbf{x},t)$, со скоростью ее диссипации $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ и с поперечной спиральностью $W(\mathbf{x},t)$.

Из уравнения (89) могут быть сделаны следующие выводы. Во-первых, в присутствии среднего магнитного поля происходит разрушение корреляции $K_R(\mathbf{x},t)$ благодаря эффекту Альвена, обусловленному полем $\overline{\mathbf{B}}$ (Parker, 1955); этот эффект выражается частью второго члена справа уравнения (89), умноженной на C_R. Во-вторых, диссипация величины $K_R(\mathbf{x},t)$ вызвана вихревыми искажениями, представленными частью второго члена, умноженной на ε/K. В-третьих, отклонения от эквипартиции (равного распределения энергии по степеням свободы) могут быть вызваны неоднородностью осредненной скорости и магнитного поля через второй член справа, умноженный на ν_K.

Изучение структуры этого уравнения показывает, что эволюция масштабированной остаточной энергии связана с перекрестной спиральностью (корреляцией скорости и магнитного поля) турбулентности в сочетании со сдвигами среднего поля. Приложение к солнечному ветру показало, что масштабированное значение $K_R(\mathbf{x},t)$ может быть увеличено вблизи внешней стороны точки Альвена во внутренней гелиосфере, тогда как во внешней гелиосфере предполагается почти стационарное поведение $K_R(\mathbf{x},t)$. Эти результаты согласуются с наблюдениями турбулентности солнечного ветра (Yokoi, Hamba, 2007).

Безразмерные физические параметры, характеризующие вращающуюся жидкость

Из уравнений (1)–(4) следует, что условия подобия течений электропроводных сред определяются рядом безразмерных параметров, от которых сильно зависит специфика рассматриваемого явления.

Наиболее известным безразмерным параметром является число Рейнольдса

$$Re = \frac{\{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\}_{L_R,u_R}}{\{\nu\nabla\mathbf{u}\}_{L_R,u_R}} = \frac{L_R u_R}{\nu}, \qquad (90)$$

где L_Rи u_R – характеристическая длина и скорость потока. Большое Re означает, что эффект адвекции или инерции доминирует на шкале длинL_R и связанной с ней шкале скоростей u_R, по сравнению с эффектом молекулярной диффузии. Этот факт не означает, что последний эффект не важен при больших Re, но что он может стать важным на пространственном масштабе, гораздо меньшем, чем L_R, т.е. на пространственном масштабе вихрей $l_D = \nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}$, рассеивающих энергию.

Аналогом числа Re в магнитном поле является магнитное число Рейнольдса

$$Re_M = \frac{\{\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}\}_{L_R,u_R}}{\{\lambda_M\Delta\mathbf{B}\}_{L_R,u_R}} = \frac{L_R u_R}{\lambda_M} = RePr_M, \qquad (91)$$

где $Pr_M = \nu/\lambda_M$ – магнитное число Прандтля.

Насколько быстрым должно быть вращение, чтобы эффект анизотропии турбулентности стал важным? Подходящей безразмерной мерой, связанной с силой Кориолиса, является обратное число Россби. Вращение среды с угловой скоростью $\Omega = |\Omega_0|$ задает масштаб времени в системе. Основной величиной, возбуждающей турбулентность, остается скорость генерации/диссипации кинетической энергии пульсационной скорости ε, которая может возбуждаться либо механически, либо системой источников и стоков, имеющих место в системе. Анализ размерностей дает следующие масштабы длины $L_\Omega := \sqrt{\varepsilon/\Omega^3}$ и скорости $u_\Omega := \sqrt{\varepsilon/\Omega}$. Когда существенна кинематическая вязкость, то можно ввести и вращательное число Рейнольдса $Re_\Omega := u_\Omega L_\Omega / \nu = \varepsilon/\nu|\Omega|^2$ и обратное вращательное число Россби

$$Ro^{-1} := 2\Omega L_\Omega / u_\Omega = 2\Omega^{1/2} l_\Omega / \varepsilon^{1/2} = 2\Omega\tau. \qquad (92)$$

На практике τ часто аппроксимируется временем оборота, $\tau = L_\Omega/u_\Omega$, где τ соответствует времени релаксации. В таблице приведены некоторые оценки Ro^{-1} для различных астрофизических тел (Brandenburg, Kandaswamy, 2005).

Для Солнца Ro^{-1} составляет около пяти в нижней части конвективной зоны (но стремится к нулю в поверхностных слоях). В галактиках, а также в протонейтронных звездах Ro^{-1} меньше (около единицы). Аккреционные диски, как правило, имеют большие значения Ro^{-1} (около 100). Это прямое следствие того, что здесь турбулентность слабая, что выражается в малом значении параметра вязкости Шакуры–Сюняева ($\alpha_{SS} \approx 0.01$). Планеты также имеют тенденцию к большим значения Ro^{-1}, поскольку здесь турбулентность обусловлена слабым конвективным потоком, поэтому время оборота велико по сравнению с периодом вращения.

Безразмерным параметром, связанным с силой Кориолиса, является также число Тейлора

Таблица. Сводка угловых скоростей, расчетных времен обращения и результирующего обратного числа Россби для различных астрофизических тел

Астрофизические объекты	Ω [с$^{-1}$]	τ	$Ro^{-1} = 2\Omega\tau$
Протонейтронные звезды	2×10^{3}	10^{-3} с	2
Диски вокруг нейтронных звезд	10^{-2}	10^{4} с	200
Юпитер	2×10^{-4}	10^{6} с	200
Звезды типа тау Тельца	2×10^{-5}	10^{6}	40
Солнечная конвективная зона	3×10^{-6}	10^{6} с	6
Протозвездные диски	2×10^{-7}	10^{9} с	400
Галактика	10^{-15}	10^{7} лет	0.6

$$T_a = \left\{\frac{(\mathbf{u} \times \Omega_0)_{u_R}}{(\nu\Delta\mathbf{u})_{L_R,u_R}}\right\}^2 = \frac{L_R^4 |\Omega_0|^2}{\nu^2}. \quad (93)$$

Для выяснения физического смысла числа Тейлора T_a отбросим силы Лоренца и плавучести в уравнении движения (2) и возьмем его ротор. Тогда для стационарного состояния и в случае пренебрежения членом молекулярной диффузии, получим $\nabla \times \left[\mathbf{u} \times \left(\omega + 2\Omega_0\right)\right] = 0$. В случае сильного эффекта Кориолиса, когда $T_a >> Re$,это уравнение сводится к условию $\left(\Omega_0 \cdot \nabla\right)\mathbf{u} = 0$, а это означает, что движение жидкости не меняется вдоль оси вращения координат, т.е. становится двумерным вдоль оси вращения Ω_0 (теорема Тейлора–Праудмана). Теорема Тейлора–Праудмана становится важной в области сферической или сферооболочечной области, где сила плавучести в радиальном направлении является основной причиной движения жидкости. Следует отметить важность роли эффектов силы Кориолиса или спиральности в геодинамо вследствие того, что $T_a >> Re$.

Сила плавучести характеризуется числом Рэлея в приближении Буссинеска

$$R_a = \left\{\frac{\left[\alpha_T (T - T_R)_{\delta T_R})\,\mathbf{g}\right]}{(\nu\nabla\mathbf{u})_{L_R,u_R}}\right\}^2 Pr = \frac{\alpha_T |\mathbf{g}| L_R^3}{\nu\lambda_T}\delta T_R, \quad (94)$$

где δT_R – характерная разность температур для величины $(T - T_R)$; $Pr = \nu/\lambda_\theta$ – число Прандтля; при этом характеристическая скорость, связанная с силой плавучести, оценивается как $u_R = \sqrt{\alpha_T g L_R \delta T_R}$. Эта сила движет жидкость от внутренней к внешней части области. С увеличением числа Тейлора T_a сгусток жидкости в одном месте захватывается вокруг оси, проходящей вдоль вектора Ω_0. В результате жидкость при вращении поднимается или опускается вдоль этой оси. Другими словами, она подвергается спиральному движению (аналогичная ситуация может наблюдаться при движении заряженной частицы вокруг линии магнитного поля). Такое движение жидкости представляет собой так называемые конвективные колонны, которые характеризуются спиральностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная работа направлена на моделирование эффектов сжимаемости в турбулентных потоках космической спиральной плазмы и термоядерной плазмы. Ее основной целью является моделирование влияния сжимаемости и вращения на динамические процессы в гидромагнитной турбулентности, в частности, такие как генерация наведенного магнитного поля, образование турбулентной энергии плазмы и их диссипация, перекачка энергии из одной формы в другую и т.д.

Практический анализ турбулентных потоков почти всегда начинается с процедуры осреднения, при котором поля структурных параметров разлагаются на сумму средних и флуктуирующих частей. Центральная проблема турбулентности состоит в этом случае в том, чтобы найти правдоподобный, если не строгий, способ моделирования турбулентного тензора Рейнольдса и других важных корреляционных функций с тем, чтобы осредненные гидромагнитные уравнения стали (по крайней мере в принципе) разрешимыми. Под термином “моделирование гидромагнитной турбулентности” в работе понимается построение схемы замыкания, которая обеспечивает детерминированный набор уравнений эволюции для средних величин, при котором все случайные флуктуации усреднены и число “неизвестных” равно порядку системы эволюционных уравнений, построенных для их определения. Эти уравнения должны, конечно, быть дополнены граничными условиями, подходящими для конкретной геометрии рассматриваемого явления.

Одна из целей данной работы состоит в применении комбинированного метода моделирования сжимаемой гиротропной гидромагнитной турбулентности, основанного на термодинамическом выводе замкнутой системы осредненных МГД-уравнений с привлечением модельных уравнений для коэффициентов переноса, полученных астрофизиками Акирой Йошизавой и Нобумицу Йокои на основе статистического подхода для моделирования несжимаемой турбулентности. Нужно отметить, что в целом ряде работ по теории моделирования несжимаемой спиральной турбулентности (в частности, при моделировании эффекта динамо – спонтанной генерации крупномасштабного магнитного поля мелкомасштабной турбулентностью) именно эти авторы впервые ввели в рассмотрение используемые в данной работе дескрипторы МГД-турбулентности (к которым относятся: турбулентная МГД-энергия, турбулентная поперечная спиральность и турбулентная остаточная спиральность), для которых статистическими методами ими были получены дифференциальные уравнения для этих величин, связанные с динамикой средних гидромагнитных полей. В дальнейшем этот подход с успехом был использован многими астрофизиками при моделировании важных плазменных явлений, в частности: эволюции гидромагнитной турбулентности в солнечном ветре и генерации среднего потока в присутствии среднего магнитного поля и поперечной спиральности в плазме токамака (Yoshizawa и др., 1999b).

В представленном исследовании этот подход обобщается на случай сжимаемой электропроводной жидкости, поскольку влияние сжимаемости на турбулентную вязкость и диффузионный перенос необходимо учитывать (в общем случае) при изучении высокоскоростной спиральной турбулентности. Таким образом, главной целью предпринятого исследования является попытка феноменологического конструирования моделей сжимаемой гидромагнитной турбулентности, которые способны работать в гиперзвуковом режиме. Результаты численной реализации (в условиях устойчивой турбулентности) модели гидромагнитного динамо для аккреционного диска в рамках намеченного здесь подхода к исследованию сжимаемой спиральной турбулентности будут представлены в последующих публикациях.

Работа поддерживалась постоянным финансированием Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство этим конкретным исследованием получено не было.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
2. ***Дьярмати И.*** Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 304 с.
3. *Колесниченко А.В., Маров М.Я.* Турбулентность и самоорганизация: Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 632 с.
4. *Колесниченко А.В.* К моделированию спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске // Астрон. вестн. 2011. Т. 45. № 3. С. 253–272. (*Kolesnichenko A.V.* On the simulation of helical turbulence in an astrophysical nonmagnetic disk// Sol. Syst. Res. 2011. V. 45. № 3. P. 246–263.) https://doi.org/10.1134/S0038094611030026
5. *Колесниченко А.В.* Термодинамическая модель сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014а. № 61. 48 с. https://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_61.pdf
6. *Колесниченко А.В.* К теории инверсного каскада энергии в спиральной турбулентности астрофизического немагнитного диска // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014б. № 70. 36 с. https://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_70.pdf
7. *Колесниченко А.В.* Континуальные модели природных и космических сред: Проблемы термодинамического конструирования. М.: ЛЕНАНД, 2017. 400 с.
8. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир, 1984. 314 с.
9. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидродинамика. Т. 2. СПб: Гидрометеоиздат, 1996. 742 с.
10. ***Пригожин И., Стенгерс И.*** Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа “Прогресс”, 1994. 240 с.

11. *Франк-Каменецкий Д.А.* Физические процессы внутри звезд. М.: Физматлит, 1959. 543 с.
12. *Фридман А.М., Бисикало Д.В.* Природа аккреционных дисков тесных двойных звезд: неустойчивость сверхотражения и развитая турбулентность // УФН. 2010. Т. 178. С. 577–604. https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200806b.0577
13. *Adumitroaie V., Ristorcelli J.R., Taulbee D.B.* Progress in Favré-Reynolds stress closures for compressible flows // Phys. Fluids. 1999. V. 10. P. 2696–2719. DOI: 10.1063/1.870130.
14. *Brandenburg A., Kandaswamy S.* Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory // Phys. Reps. 2005. V. 417. № 1–4. P. 1–209. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.06.005
15. *Coroniti F.V.* On the magnetic viscosity in Keplerian accretion disks // Astrophys. J. 1981. V. 244. P. 587–599.
16. *Favre A.* Statistical Equations of Turbulents Gases // Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics. Philadelphia: SIAM, 1969. P. 231–267.
17. *Hamba F.* Turbulent dynamo effect and cross helicity in magnetohydrodynamic flows // F*hys. Fluids. 1992. V.* 4. P. 441–450. https://doi.org/10.1063/1.858314
18. *Hawley J.F., Balbus S.A.* A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. II. Nonlinear evolution // Astrophys. J. 1991. V. 376. P. 223–233. https://doi.org/10.1086/170271
19. *Kolesnichenko A.V., Marov Ya.* The effect of spirality on the evolution of turbulence in the solar protoplanetary cloud // Sol. Syst. Res. 2007. V. 41. P. 1–18. https://doi.org/10.1134/S0038094607010017
20. *Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya.* Thermodynamic model of MHD turbulence and some of its applications to accretion disks // Sol. Syst. Res. 2008. V. 42. № 3, P. 226–255. DOI: 10.1134/S0038094608030040
21. *Kolesnichenko A.V.* To the theory of helical turbulence of a nonmagnetic astrophysical disk. Formation of large-scale vortex structures // Sol. Syst. Res. 2024. V. 58. № 4. P. 1–23. https://doi.org/10.1134/S0038094624700229
22. *Lazarian A., Vishniac E.T.* Reconnection in a weakly stochastic field // Astrophys. J. 1999. V. 517. P. 700–718. https://doi.org/10.1086/307233
23. *Liou W.W., Shih T-H., Duncun B.S.* A multiple-scale model for compressible turbulent flows // Phys. Fluids. 1995. V. 7. № 3. P. 658–666. https://doi.org/10.1063/1.868588
24. *Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V.* Turbulence and self-organization. Modeling astrophysical objects. Springer, 2013. 657 p.
25. *Matthaeus W.H., Minnie J., Breech B., Parhi S., Bieber J.W., Oughton S.* Transport of cross helicity and radial evolution of Alfvenicity in the solar wind // Geophys. Res. Lett. 2004. V. 31. Id. L12803 (4). https://doi.org/10.1029/2004GL019645
26. *Moffatt H.K.* The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 117–129. https://doi.org/10.1017/S0022112069000991
27. *Moffatt H.K.* Excitation of Magnetic Field in Conducting Medium. Moscow: Mir, 1980. 339 p.
28. *Oughton S., Prandi R.* Kinetic helicity and MHD turbulence // J. Plasma Phys. 2000. V. 64. P. 179–197. https://doi.org/10.1017/S0022377800008424
29. *Parker E.N.* Hydromagnetic dynamo models // Astrophys. J. 1955. V. 122. P. 293–314. https://doi.org/10.1086/146087
30. *Pouquet A., Frisch U., Leorat J.* Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect // J. Fluid Mech. 1976. V. 77. P. 321–334. https://doi.org/10.1017/S0022112076002140
31. *Sur S., Brandenburg A.* The role of the Yoshizawa effect in the Archontis dynamo // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 2009. V. 399. P. 273–280. https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15254.x
32. *Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.* Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\overline{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflußter Bewegung // Z. Naturforsch. 1966. B. 21a. S. 369–376. https://doi.org/10.1515/zna-1966-0401/
33. *Yokoi N.* Large-scale magnetic fields in spiral galaxies viewed from the cross-helicity effects // Astron. and Astropys.1996. V. 311. P. 731–745. arXiv: 1112.1237v2 [astro-ph.SR] 4 Mar 2013.
34. *Yokoi N.* Magnetic-field generation and turbulence suppression due to the cross-helicity effects // Phys. Fluids. 1999. V. 11. P. 2307–2316. https://doi.org/10.1063/1.870093
35. *Yokoi N.* Modeling of the turbulent magnetohydrodynamic residual-energy equation using a statistical theory // Phys. Plasmas. 2006. V. 13. Id. 062306 (17 p.). https://doi.org/10.1063/1.2209232
36. *Yokoi N.* Modeling the turbulent cross-helicity evolution: production, dissipation, and transport rates // J. Turbulence. 2011. V. 12. № 27. P. 1–33. https://doi.org/10.1080/14685248. 2011. 590495
37. *Yokoi N.* Cross helicity and related dynamos // Geophys., Astrophys. and Fluid Dyn. 2013. V. 104. P. 114–184. https://doi.org/10.1080/03091929.2012.754022
38. *Yokoi N.* Electromotive force in strongly compressible magnetohydrodynamic turbulence // J. Plasma Phys. 2018. V. 84. Id. 735840501. https://doi.org/10.1017/S0022377818000727

39. *Yokoi N., Yoshizawa A.* Statistical analysis of the effects of helicity in inhomogeneous turbulence // Phys. Fluids. A. 1993. V. 5. P. 464–447. https://doi.org/10.1063/1.858869
40. *Yokoi N.*, *Hamba F.* An application of the turbulent magnetohydrodynamic residual-energy equation model to the solar wind // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. № 11. Id. 12904-1-16. https://doi.org/10.1063/1.2792337
41. *Yokoi N., Rubinstein R., Yoshizawa A., Hamba F.* A turbulence model for magnetohydrodynamic plasmas // J. Turbulence. 2008. V. 9. № 37. P. 1–25. https://doi.org/10.1080/14685240802433057/
42. *Yoshizawa A.* Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation // Phys. Fluids. 1984. V. 27. P. 1377–1387. https://doi.org/10.1063/1.864780
43. *Yoshizawa A.* Statistical theory for magnetohydrodynamic turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 11. P. 3313–3320. https://doi.org/10.1063/1.865329
44. *Yoshizawa A.* Self-consistent turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields // Phys. Plasmas. B. 1990. V. 2. P. 1589–1600. https://doi.org/10.1063/1.859484
45. *Yoshizawa A.* Turbulent magnetohydrodynamic dynamo: Modeling of the turbulent residualhelicity equation // J. Phys. Soc. Jpn. 1996. V. 65. № 1. P. 124–132. https://doi.org/10.1143/JPSJ.65.124/
46. *Yoshizawa A.* Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows: Modelling and Statistical Theory. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic, 1998. 410 p.
47. *Yoshizawa A.* Statistical analysis of mean-flow effects on the pressure-velocity correlation // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 5. P. 1736–1744. https://doi.org/10.1063/1.1466823
48. *Yoshizawa A., Yokoi N.* Turbulent magnetohydrodynamic dynamo for accretion disks using the cross-helicity effect // Astrophys. J. 1993. V. 407. P. 540–548. https://doi.org/10.1086/172535
49. *Yoshizawa A., Liou W.W., Yokoi N., Shih T-H.* Modeling of compressible effects on the Reynolds stress using a Markovianized two-scale method // Phys. Fluids. 1997. V. 9. № 10. P. 3024–3036. https://doi.org/10.1063/1.869412
50. *Yoshizawa A., Yokoi N., Kato H.* Turbulent magnetohydrodynamic dynamo based on alpha and cross-helicity effects, with special reference to geomagnetic fields // Phys. Plasmas. 1999a. V. 6. P. 4586–4596. https://doi.org/10.1063/1.873746
51. *Yoshizawa A., Yokoi N., Itoh S.-I., Itoh K.* Magnetohydrodynamic mechanisms of electric-field transport suppression and plasma-rotation generation, with special reference to tokamak's reversed-shear confinement // Phys. Plasmas. 1999b. V. 6. № 8. P. 3194–3206. https://doi.org/10.1063/1.873559
52. *Yoshizawa A., Kato H., Yokoi N.* Mean field theory interpretation of solar polarity reversal // Astrophys. J. 2000. V. 537. P. 1039–1053. https://doi.org/10.1086/309057
53. *Yoshizawa A., Itoh S.-I., Itoh K., Yokoi N.* Dynamos and MHD theory of turbulence suppression // Plasma Phys. Control. Fusion. 2004. V. 46. R25–R94. https://doi.org/10.1088/0741-3335/46/3/R01
54. *Zhou Y., Matthaeus W.H., Dmitruk P.* Colloquium: Magnetohydrodynamic turbulence and time scales in astrophysical and space plasmas // Rev. Mod. Phys. 2004. V. 76. P. 1015–1035. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.1015